



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

Ecricome

Mathématiques

1998

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

EXERCICE 1

On considère sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes, de même loi définie pour tout entier $n > 0$ par :

$$P(X_n = -1) = p \quad \text{et} \quad P(X_n = +1) = 1 - p$$

où p est un réel tel que $0 < p < 1$.

On définit la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n \geq 1}$ par :

$$Z_n = \prod_{i=1}^n X_i.$$

1. On pose :

$$\forall n \geq 1, \quad a_n = P(Z_n = -1) \quad \text{et} \quad b_n = P(Z_n = +1).$$

(a) Calculer $a_n + b_n$.

(b) Montrer que :

$$\forall n \geq 1, \quad \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

où Q est la matrice $\begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix}$.

2. (a) Montrer que :

$$\forall n \geq 1, \quad Q^n = \begin{pmatrix} 1 - p_n & p_n \\ p_n & 1 - p_n \end{pmatrix},$$

où p_n est un réel tel que $0 < p_n < 1$, et donner une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n .

(b) En déduire une expression explicite de p_n en fonction de n et p .

(c) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{1}{2}$.

Que peut-on en déduire pour la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n \geq 1}$ lorsque n tend vers $+\infty$?

3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur p pour que les variables Z_1 et Z_2 soient indépendantes.

On suppose cette condition réalisée : quelle est alors la loi de Z_n ?

Montrer que :

$$\forall n \geq 1, \quad P(Z_1 = \varepsilon_1, \dots, Z_i = \varepsilon_i, \dots, Z_n = \varepsilon_n) = \frac{1}{2^n}$$

où $\varepsilon_i = \pm 1$ pour tout i ($1 \leq i \leq n$).

Que peut-on en déduire pour la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n \geq 1}$?

EXERCICE 2

Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles définies et continues sur $\mathbb{R}$.

À toute fonction f de E , on associe la fonction F définie par : $F(x) = \int_x^{x+1} f(t) dt$.

1. Montrer que F est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer $F'(x)$.
2. Déterminer F dans les cas suivants :
 - (a) $f(x) = \sin(2\pi x)$;
 - (b) $f(x) = 1 - x$ si $x < 1$ et $f(x) = \sqrt{x - 1}$ si $x \geq 1$.
3. Soit T l'application de E dans lui-même définie par : $T(f) = F$.
 - (a) Montrer que T est linéaire.
 - (b) Est-elle injective ? surjective ?
4. On dit que le réel λ est valeur propre de T s'il existe une fonction non nulle f de E vérifiant $T(f) = \lambda f$; f est appelée fonction propre associée à la valeur propre λ .
 - (a) Montrer que 0 est valeur propre de T .
 - (b) Montrer que pour tout réel a , la fonction $x \mapsto e^{ax}$ est une fonction propre associée à une valeur propre $\lambda(a)$ que l'on déterminera.
 - (c) Étudier les variations de cette fonction λ sur $\mathbb{R}$ et en déduire que tout réel positif est valeur propre de l'application T .

PROBLÈME

L'objectif de ce problème est de « prolonger » la fonction factorielle $n \mapsto (n - 1)!$ définie sur $\mathbb{N}^*$ en une fonction définie sur les réels qui ne sont pas des entiers négatifs ou nuls. On étudie ensuite quelques propriétés de cette fonction.

$\mathbb{R}$ est l'ensemble des réels, $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{Z}^-$ l'ensemble des entiers négatifs ou nuls. On pose $E = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$: E est donc l'ensemble des réels qui ne sont pas des entiers négatifs ou nuls.

Dans tout le problème, un produit vide (sans aucun facteur) vaut 1.

A

On considère une fonction f définie sur une partie D de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On dit que f a la propriété $\mathcal{P}$ si et seulement si :

- f est définie en 1 et $f(1) = 1$;
- $\forall x \in D, x + 1 \in D$ et $f(x + 1) = xf(x)$.

1. (a) Montrer qu'une fonction ayant la propriété $\mathcal{P}$ ne peut être définie en x entier négatif ou nul.

(b) Montrer que si $D = \mathbb{N}^*$, alors $n \mapsto f(n) = (n - 1)!$ a la propriété $\mathcal{P}$ (on adopte la convention : $0! = 1$).

2. (a) On considère la fonction Γ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

En utilisant, sans les démontrer, des résultats du cours, montrer que Γ a la propriété $\mathcal{P}$ et rappeler la valeur de $\Gamma(n)$ pour n entier strictement positif.

(b) Montrer que pour tout x réel strictement positif et tout n entier strictement positif :

$$\Gamma(x + n) = (x + n - 1)(x + n - 2) \cdots (x + 1) x \Gamma(x).$$

3. Pour tout élément x de E et tout entier naturel n tel que $x + n$ soit strictement positif, on pose :

$$A_n(x) = \frac{\Gamma(x + n)}{x(x + 1) \cdots (x + n - 1)}$$

(pour $n = 0$, le dénominateur est un produit vide, donc $A_0(x) = \Gamma(x)$).

(a) Montrer que pour $x > 0$ et $n > 0$, $A_n(x)$ ne dépend pas de n .

(b) Soit x un réel négatif non entier.

Montrer que $x + n$ est strictement positif à partir d'un rang dépendant de x noté N_x .

Soient n et p deux entiers naturels. Pour n strictement supérieur à N_x , calculer $A_{n+p}(x)$ en fonction de $A_p(x + n)$.

En déduire que :

$$\forall n > N_x, \forall p \in \mathbb{N}, \quad A_{n+p}(x) = A_n(x).$$

(c) Pour $x > 0$, on pose $N_x = 0$. Le réel $A_n(x)$ étant indépendant de n pour $n > N_x$, on définit sur E une fonction $\tilde{\Gamma}$ par $\tilde{\Gamma}(x) = A_n(x)$ pour $n > N_x$.

Montrer que la fonction $\tilde{\Gamma}$ a la propriété $\mathcal{P}$, et que pour tout x réel strictement positif : $\tilde{\Gamma}(x) = \Gamma(x)$.

En déduire que :

$$\forall x \in E, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \tilde{\Gamma}(x + n) = (x + n - 1)(x + n - 2) \cdots (x + 1)x \tilde{\Gamma}(x).$$

On dit que $\tilde{\Gamma}$ prolonge la fonction Γ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par abus de notation, on notera désormais dans tout le problème simplement Γ et non plus $\tilde{\Gamma}$ la fonction ainsi prolongée.

4. (a) On pose : $I = \int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{t}} dt$ et $J = \int_1^{+\infty} t \ln t e^{-t} dt$.

Montrer que I et J sont des intégrales absolument convergentes.

(b) Soit h la fonction de deux variables définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par $h(t, x) = t^{x-1}$.

En appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction $x \mapsto u_t(x) = h(t, x)$, montrer que :

$$\forall t \in]0, 1[, \forall x \in \left] \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right[, \quad |h(t, x) - h(t, 1)| \leq |x - 1| \frac{|\ln t|}{\sqrt{t}} \quad (1)$$

et que :

$$\forall t \in [1, +\infty[, \forall x \in \left] \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right[, \quad |h(t, x) - h(t, 1)| \leq |x - 1| t \ln t \quad (2)$$

(c) Montrer qu'il existe une constante K telle que :

$$\forall x \in \left] \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right[, \quad |\Gamma(x) - \Gamma(1)| \leq K |x - 1| \quad (3)$$

En déduire que la fonction Γ est continue au point 1.

5. En utilisant la question précédente, montrer que $\Gamma(x) \sim \frac{1}{x}$ au voisinage de 0.

En déduire un équivalent simple de $\Gamma(x)$ au voisinage de $x = -n$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

6. On admet l'équivalence suivante :

$$\Gamma(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^{x-1} e^{-x} \sqrt{2\pi x} \quad (*)$$

(a) Calculer pour x réel fixé $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

(b) Montrer que si x est un entier naturel n , l'équivalence (*) permet de retrouver la formule de Stirling :

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}.$$

(c) Montrer que :

$$\forall x \in E, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma(x+n)}{n^x \Gamma(n)} = 1.$$

(d) En déduire que :

$$\forall x \in E, \quad \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1) \cdots (x+n)}.$$

B

On se propose dans cette partie de donner une autre expression de la fonction Γ sur E .

1. Pour n strictement positif, on pose $g_n(x) = \frac{e^{x/n}}{1 + x/n}$ et

$$G_n(x) = \prod_{k=1}^n g_k(x).$$

Montrer que pour tout réel x positif, la série de terme général $u_n(x) = \ln g_n(x)$ est convergente.

En déduire, pour tout réel x positif, l'existence de $\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x)$.

On appelle $G(x)$ cette limite. On définit ainsi une fonction G sur $\mathbb{R}_+$.

2. Montrer que la suite $(G_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente pour x réel négatif non entier. (On remarquera que pour tout x fixé, $g_n(x)$ est strictement positif pour n suffisamment grand.)

On a donc une fonction G définie sur E par : $G(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x)$.

3. Vérifier que :

$$\ln G_n(1) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1)$$

et retrouver le résultat suivant : la suite de terme général

$$v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$$

a une limite finie strictement positive γ quand n tend vers $+\infty$.

γ s'appelle la constante d'Euler.

(On pourra utiliser, en le justifiant, le résultat : $\forall x > 0, e^x > x + 1$.)

4. Montrer que :

$$\forall x \in E, \quad G_n(x) = x \Gamma(x) \frac{n! \exp\left(x \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right)}{(x+n) \Gamma(x+n)}.$$

5. En utilisant la question A.6.c, montrer que :

$$\forall x \in E, \quad \Gamma(x) = \frac{e^{-\gamma x}}{x} G(x).$$