



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

Ecricome

Mathématiques

1997

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice 1

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à deux. E est un espace vectoriel euclidien de dimension n . On note id_E l'application identique de E dans lui-même. Lorsque x et y sont deux vecteurs de E , le produit scalaire de x par y s'écrit $\langle x, y \rangle$ et $\|x\|$ représente la norme de x . Quand u est un vecteur non nul de E , on définit l'application φ_u de E dans lui-même par :

$$\forall x \in E, \quad \varphi_u(x) = \frac{2\langle x, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u - x$$

1. Montrer que φ_u est un endomorphisme involutif de E (c'est-à-dire un endomorphisme de E tel que $\varphi_u \circ \varphi_u = \text{id}_E$).
2. Démontrer que u est un vecteur propre de φ_u associé à une valeur propre que l'on précisera.
3. Établir que φ_u conserve le produit scalaire, c'est-à-dire que :

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2, \quad \langle \varphi_u(x_1), \varphi_u(x_2) \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle$$

En déduire que φ_u conserve la norme, c'est-à-dire que :

$$\forall x \in E, \quad \|\varphi_u(x)\| = \|x\|$$

4. On désigne par D_u la droite vectorielle de base u , et par H_u l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à u (autrement dit, $H_u = D_u^\perp$, supplémentaire orthogonal de D_u).
 - (a) Montrer que H_u est le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 pour φ_u .
 - (b) φ_u est-il diagonalisable ?

(c) t étant un réel non nul, comparer les applications φ_u et φ_{tu} .

5. Étude d'une réciproque. On suppose que σ est un endomorphisme de E tel qu'il existe une droite vectorielle Δ de E vérifiant :

$$\forall y \in \Delta, \quad \sigma(y) = y \quad \text{et} \quad \forall z \in \Delta^\perp, \quad \sigma(z) = -z$$

(a) Montrer que σ est involutif et conserve le produit scalaire.

(b) Établir qu'il existe au moins un vecteur u non nul de Δ tel que l'on ait : $\sigma = \varphi_u$.

(c) Soit M la matrice de σ dans une base orthonormale $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E . Soit $a_{i,j}$ (où i et j désignent des entiers compris entre 1 et n) le coefficient de la i -ième ligne et j -ième colonne de la matrice ${}^tMM$. Montrer que $a_{i,j} = \langle \sigma(e_i), \sigma(e_j) \rangle$. En déduire que ${}^tMM = I_n$, où I_n désigne la matrice unité d'ordre n .

Exercice 2

1. On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = x^x$$

et la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{(-1)^n}{n^n}$$

(a) Montrer que l'intégrale $I = \int_0^1 f(t) dt$ converge (ici, on ne demande pas de la calculer).

(b) Étudier la nature de la série de terme général u_n .

2. Soit trois entiers naturels n, p et k ; on pose :

$$J_n = \int_0^1 (x \ln x)^n dx \quad \text{et} \quad K_{p,k} = \int_0^1 x^p (\ln x)^k dx$$

(a) Montrer que J_n et $K_{p,k}$ existent (on distinguera les cas $p = 0$ et $p \neq 0$).

(b) Pour k différent de zéro, déterminer une relation entre $K_{p,k}$ et $K_{p,k-1}$.

(c) En déduire la valeur de J_n en fonction de n .

3. (a) Donner, sur $]0, 1]$, un majorant de la fonction qui à x associe $|x \ln x|$.

(b) Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à deux :

$$\left| I - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} J_k \right| \leq \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{1}{e} \right)^{n+1}$$

(On pourra utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à la fonction exponentielle.)

(c) En déduire que :

$$I = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^{k+1}}.$$

(d) Calculer avec une précision d'au moins $2 \cdot 10^{-7}$ une valeur approchée de I .

Problème

Le but de ce problème (dont les trois parties sont indépendantes) est l'étude du temps passé dans une mairie par un usager quand un ou plusieurs guichets sont à la disposition du public, et que plusieurs personnes se présentent en même temps. On rappelle que, si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de densités de probabilité respectives f et g , et si la fonction h définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(t-x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-x) g(x) dx$$

est définie et continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points, alors $X + Y$ admet h pour densité de probabilité.

À moins d'une mention explicite du contraire dans l'énoncé, X étant une variable aléatoire à densité, on désignera par F_X sa fonction de répartition, et par f_X une fonction densité de probabilité de X .

Partie I — Étude de deux guichets

Dans cette partie, il y a deux guichets à la disposition du public. Trois personnes A_1 , A_2 et A_3 entrent en même temps dans la salle. À l'instant $t = 0$, A_1 et A_2 s'adressent simultanément aux deux guichets. A_3 attend et s'adressera au premier guichet libéré, soit par A_1 , soit par A_2 .

On suppose que :

- la durée de passage au guichet de A_i ($i = 1, 2$ ou 3) est une variable aléatoire X_i qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$;
- les variables aléatoires X_1 , X_2 et X_3 sont mutuellement indépendantes;
- la durée du changement de personne à chaque guichet peut être considérée comme nulle.

1. Étude d'un événement.

On se propose de calculer la probabilité de l'événement E : « A_3 quitte la mairie en dernier ».

(a) Montrer que la variable X'_2 définie par $X'_2 = -X_2$ suit la loi uniforme sur l'intervalle $[-1, 0]$.

(b) On admet l'indépendance de X_1 et X'_2 .

Calculer une densité de probabilité φ_1 de la variable Y_1 , définie par : $Y_1 = X_1 - X_2$.

On précisera cette fonction sur chacun des intervalles suivants : $] - \infty, -1[$, $] - 1, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$.

En déduire Φ_1 , fonction de répartition de Y_1 .

(c) Calculer la fonction de répartition Φ_2 de la variable Z_1 , définie par $Z_1 = |Y_1|$. En déduire une densité de probabilité φ_2 de Z_1 .

(d) On admet l'indépendance de Z_1 et X_3 .

i. Calculer une densité de probabilité φ_3 de la variable $Z_1 - X_3$. On précisera cette fonction sur chacun des intervalles suivants : $] - \infty, -1[$, $] - 1, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$.

ii. En déduire la probabilité de l'événement $(Z_1 - X_3 \leq 0)$. Quelle est la probabilité de E ?

2. Étude d'une variable aléatoire.

On pose : $T_3 = \inf(X_1, X_2) + X_3$.

(a) Que représente T_3 pour A_3 ?

(b) Calculer la fonction de répartition F de $\inf(X_1, X_2)$.

En déduire une densité de probabilité f de cette variable aléatoire. Que remarque-t-on?

(c) Montrer que la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ 2t - t^2 & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ (t - 2)^2 & \text{si } 1 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{si } t > 2 \end{cases}$$

est une densité de probabilité de T_3 . En déduire l'espérance mathématique et la variance de T_3 .

Partie 2 — Étude de n guichets

Dans cette partie, n guichets sont ouverts au public ($n \in \mathbb{N}^*$). n personnes $A_1, A_2, \dots, A_n$ se présentent à la mairie à l'instant $t = 0$ et s'adressent à l'un des guichets (les n guichets sont donc tous occupés à l'instant $t = 0$).

On suppose que :

- la durée de passage au guichet de A_i ($1 \leq i \leq n$) est une variable aléatoire X_i qui suit la loi exponentielle de paramètre λ strictement positif donné;
- les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.

1. On désigne par U_n la variable aléatoire égale au temps passé au guichet par la personne qui a, la première, terminé sa démarche administrative.

Déterminer la loi de U_n . Quelle loi reconnaît-on ? Donner son espérance mathématique et sa variance.

2. On note V_n la variable aléatoire égale au temps passé au guichet par la personne qui a, la dernière, terminé sa démarche administrative.

Déterminer la fonction de répartition de V_n . En déduire une de ses densités de probabilité, et montrer que son espérance mathématique est donnée par :

$$E(V_n) = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} \binom{n}{k+1}$$

3. Soit t un réel strictement positif. On désigne par W_t la variable aléatoire égale au nombre de personnes ayant terminé leur démarche administrative à l'instant t . Donner la loi de W_t ainsi que son espérance mathématique.

Partie 3 — Étude d'un guichet

Dans cette partie, un seul guichet est ouvert au public. Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, on se donne une suite $N, X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes. On suppose que les variables X_i ($i \in \mathbb{N}^*$) suivent toutes la loi exponentielle de paramètre λ strictement positif donné, et que N suit la loi géométrique de paramètre p (où p désigne un élément de l'intervalle $]0, 1[$).

N personnes $A_1, A_2, \dots, A_N$ se présentent à la mairie à l'instant $t = 0$, et font donc la queue, dans cet ordre, devant ce guichet.

On suppose que, pour tout entier naturel i non nul, la durée de passage au guichet de A_i est donnée par la variable aléatoire X_i . On pose :

$$S = \sum_{i=1}^N X_i$$

ce qui signifie que :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad S(\omega) = \sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega)$$

Par exemple :

- si $N(\omega) = 2$ alors $S(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega)$;
- si $N(\omega) = 4$ alors $S(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega) + X_3(\omega) + X_4(\omega)$.

Ainsi, S , qui est la somme d'un nombre aléatoire de variables X_i , apparaît comme étant le temps total passé à la mairie par la personne qui termine en dernier sa démarche administrative.

1. Soit n un entier naturel non nul fixé. Déterminer une densité de probabilité de la variable aléatoire

$$\sum_{i=1}^n X_i.$$

2. Soit x un réel strictement positif.

(a) Exprimer, à l'aide d'une intégrale dont le calcul explicite (bien que possible) n'est pas demandé, la probabilité que l'événement $(S \leq x)$ soit réalisé sachant que l'événement $(N = n)$ l'est.

(b) En déduire la fonction de répartition de S (on admettra qu'il est possible de permuter les deux symboles

$$\sum_{n=1}^{+\infty}$$

et $\int_0^x$ que l'on rencontrera au cours du calcul).

Donner une densité de probabilité de S .

Reconnaître la loi de S .

- (c) Montrer que $E(S) = E(X_i) E(N)$.