



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

Ecricome

Mathématiques

1996

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

EXERCICE 1

1.1. Étude préliminaire

1.1.1. Continuité et dérivabilité de f sur $\mathbb{R}_+$.

On écrit $f(x) = e^{x \ln x}$ pour $x > 0$, on traite $\mathbb{R}_+^*$ par les théorèmes généraux, puis le point 0 par un calcul de limite et de taux d'accroissement.

Sur $\mathbb{R}_+^* : x \mapsto x \ln x$ est dérivable (produit de fonctions dérivables) et $\exp$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, avec :

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = (\ln x + 1) e^{x \ln x} = (1 + \ln x) x^x.$$

Continuité en 0 : par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$, donc par continuité de $\exp$ en 0, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = e^0 = 1 = f(0)$. Ainsi f est continue en 0.

Dérivabilité en 0 : pour $x \in]0, 1[$, posons $u = x \ln x$; on a $u < 0$, donc $u \neq 0$, et :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{e^u - 1}{x} = \frac{e^u - 1}{u} \cdot \frac{u}{x} = \frac{e^u - 1}{u} \cdot \ln x.$$

Lorsque $x \rightarrow 0^+$, $u \rightarrow 0$ et $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1$ (nombre dérivé de $\exp$ en 0); par composition des limites, le premier facteur tend vers 1, tandis que $\ln x \rightarrow -\infty$. Donc le taux d'accroissement tend vers $-\infty$.

Conclusion

f est continue sur $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $f'(x) = (1 + \ln x)x^x$, et n'est pas dérivable en 0; la courbe $(\mathcal{C})$ admet au point $(0, 1)$ une demi-tangente verticale.

1.1.2. Tableau de variations de f .

Pour $x > 0$, $x^x > 0$, donc $f'(x)$ a le signe de $1 + \ln x$: $f'(x) < 0$ sur $\left]0, \frac{1}{e}\right[$, $f'\left(\frac{1}{e}\right) = 0$ et $f'(x) > 0$ sur $\left]\frac{1}{e}, +\infty\right[$.

Comme f est continue sur $\mathbb{R}_+$, f est strictement décroissante sur $\left[0, \frac{1}{e}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right]$.

Valeur du minimum : $f\left(\frac{1}{e}\right) = \exp\left(\frac{1}{e} \ln \frac{1}{e}\right) = e^{-1/e} \approx 0,692$.

Limite en $+\infty$: $x \ln x \rightarrow +\infty$, donc $f(x) \rightarrow +\infty$.

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		—	0	+	
f	1	$\searrow$	$e^{-1/e}$	$\nearrow$	$+\infty$

Conclusion

f décroît de 1 à $e^{-1/e}$ sur $\left[0, \frac{1}{e}\right]$ puis croît de $e^{-1/e}$ à $+\infty$ sur $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right]$.

1.1.3. Position de $(\mathcal{C})$ par rapport à la tangente $(\mathcal{T})$ au point d'abscisse 1.

On a $f(1) = 1$ et $f'(1) = (1 + 0) \cdot 1 = 1$, donc $(\mathcal{T})$ a pour équation $y = f(1) + f'(1)(x - 1)$, c'est-à-dire $y = x$. Il s'agit d'étudier le signe de $d(x) = f(x) - x$ sur $\mathbb{R}_+$.

Méthode 1 — Par la convexité.

f' est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit, et, en utilisant $f' = (1 + \ln x)f$:

$$f''(x) = \frac{1}{x}f(x) + (1 + \ln x)f'(x) = x^x \left[\frac{1}{x} + (1 + \ln x)^2 \right] > 0 \quad \text{pour } x > 0.$$

Ainsi f est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa courbe est au-dessus de ses tangentes. Pour obtenir une inégalité stricte, étudions d : d est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $d'(x) = f'(x) - 1 = f'(x) - f'(1)$. Comme $f'' > 0$, f' est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc $d'(x) < 0$ pour $0 < x < 1$ et $d'(x) > 0$ pour $x > 1$. Par continuité de d sur $\mathbb{R}_+$, d est strictement décroissante sur $[0, 1]$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$, de minimum $d(1) = 0$. Donc $d(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$.

Méthode 2 — Par une factorisation directe.

Pour $x > 0$: $f(x) - x = x(x^{x-1} - 1) = x(e^{(x-1)\ln x} - 1)$. Or $x - 1$ et $\ln x$ ont le même signe sur $\mathbb{R}_+^*$ (tous deux strictement négatifs sur $]0, 1[$, strictement positifs sur $]1, +\infty[$), donc $(x - 1)\ln x > 0$ pour $x \neq 1$, d'où $e^{(x-1)\ln x} > 1$ et $f(x) - x > 0$. En $x = 0$: $f(0) - 0 = 1 > 0$.

Comparaison : la méthode 1 est la méthode générale (la convexité donne toujours la position par rapport à une tangente) ; la méthode 2, plus courte, exploite la forme particulière de f et donne directement l'inégalité stricte.

Conclusion

la courbe ($\mathcal{C}$) est strictement au-dessus de sa tangente ($\mathcal{T}$) : $y = x$, sauf au point de contact $(1, 1)$.

1.1.4. Bijection $g : I \rightarrow J$.

On applique le théorème de la bijection. La fonction g est continue sur $I = \left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$; sa dérivée est strictement positive sur $\left]\frac{1}{e}, +\infty\right[$, donc, par continuité en $\frac{1}{e}$, g est strictement croissante sur I .

Par le théorème de la bijection, g réalise une bijection de I sur l'intervalle $g(I) = \left[g\left(\frac{1}{e}\right), \lim_{+\infty} g\right[$.

Conclusion

g est une bijection de I sur $J = [e^{-1/e}, +\infty[$.

1.2. Étude d'une fonction

1.2.1. Existence de φ .

On prend $\varphi = g^{-1} : J \rightarrow I$, qui existe d'après 1.1.4. Pour $x \in J$, $y = \varphi(x)$ est l'unique élément de I tel que $g(y) = x$, c'est-à-dire $y^y = x$.

Conclusion

l'application $\varphi = g^{-1}$, de J sur I , vérifie $\forall x \in J, \varphi(x)^{\varphi(x)} = x$ (et c'est la seule application de J dans I ayant cette propriété, par injectivité de g).

1.2.2. $\varphi = o(\ln)$ au voisinage de $+\infty$.

On passe au logarithme dans la relation définissant φ .

D'après le théorème de la bijection, φ est continue et strictement croissante sur J .

Comme $\varphi(J) = I$ n'est pas majoré, la fonction croissante φ tend vers $+\infty$ en $+\infty$: sinon elle serait majorée par sa limite finie.

De plus $g(1) = 1$, donc $\varphi(1) = 1$, et pour $x > 1$, $\varphi(x) > 1$ par stricte croissance, d'où $\ln \varphi(x) > 0$.

Pour $x > 1$, en prenant le logarithme de $\varphi(x)^{\varphi(x)} = x$: $\varphi(x) \ln \varphi(x) = \ln x$, avec $\ln x > 0$, donc :

$$\frac{\varphi(x)}{\ln x} = \frac{1}{\ln \varphi(x)}.$$

Comme $\varphi(x) \rightarrow +\infty$, $\ln \varphi(x) \rightarrow +\infty$ et $\frac{\varphi(x)}{\ln x} \rightarrow 0$.

Conclusion

$$\varphi(x) = o(\ln x) \text{ lorsque } x \rightarrow +\infty.$$

1.2.3. Dérivabilité de φ et expression de φ' .

On utilise le théorème de dérivation de la réciproque : si g est dérivable en $y = \varphi(x)$ avec $g'(y) \neq 0$, alors φ est dérivable en x et $\varphi'(x) = \frac{1}{g'(\varphi(x))}$.

Or $g'(y) = (1 + \ln y)y^y$ ne s'annule sur I qu'en $y = \frac{1}{e}$, c'est-à-dire pour $x = g\left(\frac{1}{e}\right) = e^{-1/e}$. Donc φ est dérivable en tout point de $]e^{-1/e}, +\infty[$.

Étude au point $a = e^{-1/e}$ (borne gauche de J , avec $\varphi(a) = \frac{1}{e}$) : pour $x \in J, x > a$, posons $y = \varphi(x) > \frac{1}{e}$. Alors :

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a} = \frac{y - \frac{1}{e}}{g(y) - g\left(\frac{1}{e}\right)}.$$

Lorsque $x \rightarrow a^+$, $y \rightarrow \frac{1}{e}^+$ par continuité de φ , et $\frac{g(y) - g(1/e)}{y - 1/e} \rightarrow g'\left(\frac{1}{e}\right) = 0$ en restant strictement positif (g strictement croissante). Son inverse tend donc vers $+\infty$: φ n'est pas dérivable (à droite) en a .

Ainsi le plus grand intervalle inclus dans J sur lequel φ est dérivable est $K =]e^{-1/e}, +\infty[$.

Expression de φ' : pour $x \in K$, $\varphi(x) > \frac{1}{e}$ donc $1 + \ln \varphi(x) > 0$, et $\varphi(x)^{\varphi(x)} = x$, d'où :

$$\varphi'(x) = \frac{1}{(1 + \ln \varphi(x)) \varphi(x)^{\varphi(x)}} = \frac{1}{x(1 + \ln \varphi(x))}.$$

En multipliant numérateur et dénominateur par $\varphi(x) > 0$ et en utilisant $\varphi(x) \ln \varphi(x) = \ln x$:

$$\varphi'(x) = \frac{\varphi(x)}{x(\varphi(x) + \varphi(x) \ln \varphi(x))} = \frac{\varphi(x)}{x(\varphi(x) + \ln x)}.$$

Conclusion

$$K =]e^{-1/e}, +\infty[\text{ et } \forall x \in K, \varphi'(x) = \frac{\varphi(x)}{x(\varphi(x) + \ln x)}.$$

1.2.4. (a) Abscisse u_n .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $e^{-1/e} < e^0 = 1 \leq n$, on a $n \in K$, donc $(\mathcal{T}_n)$ existe et a pour équation :

$$y = \varphi(n) + \varphi'(n)(x - n).$$

D'après 1.2.3, $\varphi'(n) > 0$ (car $\varphi(n) > 0$, $n > 0$ et $\varphi(n) + \ln n = \varphi(n)(1 + \ln \varphi(n)) > 0$), donc $(\mathcal{T}_n)$ n'est pas parallèle à l'axe des abscisses et le coupe en un unique point, d'abscisse u_n telle que $0 = \varphi(n) + \varphi'(n)(u_n - n)$, soit :

$$u_n = n - \frac{\varphi(n)}{\varphi'(n)} = n - n(\varphi(n) + \ln n).$$

Conclusion

$$u_n = n(1 - \varphi(n) - \ln n).$$

Vérification : pour $n = 1$, $\varphi(1) = 1$ et $u_1 = 0$; en effet $\varphi'(1) = 1$ et $(\mathcal{T}_1)$ est la droite $y = x$, qui passe par O .

1.2.4. (b) Équivalent de u_n .

Pour $n \geq 2$, $\ln n > 0$ et :

$$\frac{u_n}{-n \ln n} = \frac{1 - \varphi(n) - \ln n}{-\ln n} = 1 + \frac{\varphi(n)}{\ln n} - \frac{1}{\ln n}.$$

D'après 1.2.2, $\frac{\varphi(n)}{\ln n} \rightarrow 0$, et $\frac{1}{\ln n} \rightarrow 0$, donc ce quotient tend vers 1.

Conclusion

$u_n \sim -n \ln n$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

EXERCICE 2

2.1. (a) Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Si

$$Q = \sum_{k=0}^d c_k X^k,$$

alors

$$Q(X+1) = \sum_{k=0}^d c_k (X+1)^k$$

est un polynôme, donc $\Phi(Q) \in \mathbb{R}[X]$.

Linéarité : pour $Q, R \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $(\lambda Q + \mu R)(X+1) = \lambda Q(X+1) + \mu R(X+1)$, donc :

$$\Phi(\lambda Q + \mu R) = \lambda Q(X) + \mu R(X) + \lambda Q(X+1) + \mu R(X+1) = \lambda \Phi(Q) + \mu \Phi(R).$$

Conclusion

Φ est une application linéaire de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même, c'est-à-dire un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

2.1. (b) i. Φ_p est un endomorphisme de $\mathbb{R}_p[X]$.

Si $\deg Q \leq p$, chaque $(X+1)^k$ avec $k \leq p$ est de degré $k \leq p$, donc $Q(X+1) \in \mathbb{R}_p[X]$, puis $\Phi(Q) \in \mathbb{R}_p[X]$. Ainsi $\mathbb{R}_p[X]$ est stable par Φ , et la restriction Φ_p , linéaire comme restriction d'une application linéaire, va de $\mathbb{R}_p[X]$ dans $\mathbb{R}_p[X]$.

Conclusion

Φ_p est un endomorphisme de $\mathbb{R}_p[X]$.

2.1. (b) ii. Matrice de Φ_p dans B_p .

Pour $k \in \{0, \dots, p\}$, la formule du binôme donne :

$$\Phi(X^k) = X^k + (X+1)^k = X^k + \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} X^j = 2X^k + \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} X^j.$$

La colonne d'indice k (les indices allant de 0 à p) de la matrice M_p de Φ_p dans B_p contient donc $\binom{k}{j}$ en ligne $j < k$, 2 en ligne k et 0 en ligne $j > k$. Par exemple, pour $p = 3$:

$$M_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Conclusion

M_p est triangulaire supérieure et tous ses termes diagonaux valent 2.

2.1. (b) iii. Φ_p est un automorphisme de $\mathbb{R}_p[X]$.

Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont

tous non nuls. Ici ils valent tous $2 \neq 0$, donc M_p est inversible, et l'endomorphisme Φ_p qu'elle représente est bijectif.

Conclusion

Φ_p est un automorphisme de $\mathbb{R}_p[X]$.

2.1. (c) Φ est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

On ramène la bijectivité de Φ à celle des Φ_p , puisque tout polynôme appartient à un $\mathbb{R}_p[X]$.

Injectivité : soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\Phi(Q) = 0$. Il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $Q \in \mathbb{R}_p[X]$; alors $\Phi_p(Q) = 0$ et, Φ_p étant injectif, $Q = 0$.

Surjectivité : soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $p \in \mathbb{N}$ tel que $P \in \mathbb{R}_p[X]$. Φ_p étant surjectif, il existe $Q \in \mathbb{R}_p[X]$ tel que $\Phi(Q) = \Phi_p(Q) = P$.

Remarque : on peut aussi voir l'injectivité par le degré. Si $Q \neq 0$ est de degré d et de coefficient dominant $c \neq 0$, alors $Q(X+1)$ est aussi de degré d et de coefficient dominant c , donc $\Phi(Q)$ est de degré d et de coefficient dominant $2c \neq 0$: $\Phi(Q) \neq 0$. Cette remarque montre de plus que Φ conserve le degré.

Conclusion

Φ est un endomorphisme bijectif de $\mathbb{R}[X]$, c'est-à-dire un automorphisme.

2.1. (d) Existence, unicité et degré de E_n .

La relation (1) s'écrit $\Phi(P) = 2X^n$. Comme Φ est bijective, le polynôme $2X^n$ a un unique antécédent, noté $E_n = \Phi^{-1}(2X^n)$.

Degré : $2X^n \in \mathbb{R}_n[X]$ et Φ_n est surjectif, donc $2X^n$ a un antécédent dans $\mathbb{R}_n[X]$, qui est E_n par unicité; ainsi $\deg E_n \leq n$. D'après la remarque de 2.1.(c), $\deg \Phi(E_n) = \deg E_n$ (car $E_n \neq 0$, puisque $\Phi(0) = 0 \neq 2X^n$), et $\deg \Phi(E_n) = \deg(2X^n) = n$.

Conclusion

il existe un unique polynôme E_n vérifiant (1), et $\deg E_n = n$.

2.2. (a) Expression de $E_n(X + 1) + E_n(X)$.

Par la formule du binôme puis en échangeant deux sommes finies (sur les couples (j, k) tels que $0 \leq j \leq k \leq n$) :

$$E_n(X + 1) = \sum_{k=0}^n a_{n,k} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} X^j = \sum_{j=0}^n \left(\sum_{k=j}^n \binom{k}{j} a_{n,k} \right) X^j.$$

En ajoutant

$$E_n(X) = \sum_{j=0}^n a_{n,j} X^j :$$

$$E_n(X + 1) + E_n(X) = \sum_{j=0}^n \left[a_{n,j} + \sum_{k=j}^n \binom{k}{j} a_{n,k} \right] X^j.$$

Question adaptée au programme actuel : l'énoncé original contenait la coquille $E(X)$ au lieu de $E_n(X)$ et la notation ancienne $C_{k'}^j$ remplacée par $\binom{k}{j}$.

Conclusion

l'égalité demandée est établie.

2.2. (b) Système vérifié par les $a_{n,k}$ et valeur de $a_{n,n}$.

Question adaptée au programme actuel : l'énoncé original demandait « la valeur de $a_{n,k}$ », ce qui est manifestement une coquille (le système ne donne pas de formule close générale) ; on demande la valeur du coefficient dominant $a_{n,n}$.

Par 2.2.(a), la relation $E_n(X) + E_n(X + 1) = 2X^n$ et l'unicité des coefficients d'un polynôme donnent, pour tout $j \in \{0, \dots, n\}$:

$$a_{n,j} + \sum_{k=j}^n \binom{k}{j} a_{n,k} = \begin{cases} 0 & \text{si } j < n \\ 2 & \text{si } j = n \end{cases}$$

Le terme $k = j$ de la somme vaut $\binom{j}{j} a_{n,j} = a_{n,j}$, donc le système s'écrit :

$$2a_{n,n} = 2 \quad \text{et} \quad \forall j \in \{0, \dots, n-1\}, \quad 2a_{n,j} + \sum_{k=j+1}^n \binom{k}{j} a_{n,k} = 0.$$

C'est un système triangulaire de $n + 1$ équations à $n + 1$ inconnues, à coefficients diagonaux égaux à 2, qui se résout en partant de $j = n$:

$$a_{n,n} = 1 \quad \text{et} \quad a_{n,j} = -\frac{1}{2} \sum_{k=j+1}^n \binom{k}{j} a_{n,k} \quad \text{pour } j = n-1, n-2, \dots, 0.$$

En particulier $a_{n,n-1} = -\frac{1}{2} \binom{n}{n-1} a_{n,n} = -\frac{n}{2}$ pour $n \geq 1$.

Conclusion

les $a_{n,k}$ sont l'unique solution du système triangulaire ci-dessus et $a_{n,n} = 1$: E_n est unitaire.

2.2. (c) E_0, E_1, E_2 .

On résout le système de 2.2.(b).

$n = 0$: $2a_{0,0} = 2$, donc $E_0(X) = 1$.

$n = 1$: $a_{1,1} = 1$, $a_{1,0} = -\frac{1}{2} \binom{1}{0} a_{1,1} = -\frac{1}{2}$, donc $E_1(X) = X - \frac{1}{2}$.

$$n = 2 : a_{2,2} = 1, \quad a_{2,1} = -\frac{1}{2} \binom{2}{1} a_{2,2} = -1,$$

$$a_{2,0} = -\frac{1}{2} \left[\binom{1}{0} a_{2,1} + \binom{2}{0} a_{2,2} \right] = -\frac{1}{2}(-1 + 1) = 0, \text{ donc } E_2(X) = X^2 - X.$$

Vérification : $E_1(X) + E_1(X+1) = X - \frac{1}{2} + X + \frac{1}{2} = 2X$ et

$$E_2(X) + E_2(X+1) = X^2 - X + X^2 + 2X + 1 - X - 1 = 2X^2.$$

Conclusion

$$E_0 = 1, \quad E_1 = X - \frac{1}{2}, \quad E_2 = X^2 - X.$$

2.2. (d) Relation $E'_n = nE_{n-1}$ et dérivées successives.

Question adaptée au programme actuel : l'énoncé original écrivait « pour tout entier naturel n » ; pour $n = 0$, E_{-1} n'est pas défini, on prend donc $n \geq 1$.

On dérive la relation (1) et on utilise l'injectivité de Φ .

Pour tout polynôme Q , $(Q(X+1))' = Q'(X+1)$: c'est vrai pour $Q = X^k$ car $((X+1)^k)' = k(X+1)^{k-1}$, puis par linéarité. En dérivant $E_n(X) + E_n(X+1) = 2X^n$ ($n \geq 1$) :

$$E'_n(X) + E'_n(X+1) = 2nX^{n-1}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \Phi(E'_n) = 2nX^{n-1} = n\Phi(E_{n-1})$$

$$= \Phi(nE_{n-1}).$$

Φ étant injective, $E'_n = nE_{n-1}$.

Dérivées successives : montrons par récurrence sur $k \in \{0, \dots, n\}$ la propriété $\mathcal{H}_k$:

$$E_n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} E_{n-k}.$$

$\mathcal{H}_0$ est vraie. Si $\mathcal{H}_k$ est vraie avec $k < n$, alors $n-k \geq 1$ et, par la relation précédente appliquée à $n-k$:

$$E_n^{(k+1)} = \frac{n!}{(n-k)!} E'_{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!} (n-k) E_{n-k-1} = \frac{n!}{(n-k-1)!} E_{n-k-1},$$

ce qui est $\mathcal{H}_{k+1}$.

En particulier $E_n^{(n)} = n! E_0 = n!$ est constant, donc $E_n^{(k)} = 0$ pour $k > n$.

Conclusion

pour $n \geq 1$, $E'_n = nE_{n-1}$; pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E_n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} E_{n-k}$ si $0 \leq k \leq n$ et $E_n^{(k)} = 0$ si $k > n$.

2.2. (e) Symétrie $E_n(X) = (-1)^n E_n(1 - X)$ et conséquences.

On montre que $R(X) = (-1)^n E_n(1 - X)$ vérifie (1), puis on conclut par unicité (2.1.(d)).

R est un polynôme. Pour tout réel x , la relation (1) évaluée en $t = -x$ donne $E_n(-x) + E_n(1 - x) = 2(-x)^n = 2(-1)^n x^n$. Donc :

$$R(x) + R(x + 1) = (-1)^n [E_n(1 - x) + E_n(-x)] = (-1)^n \cdot 2(-1)^n x^n = 2x^n.$$

Les polynômes $R(X) + R(X + 1)$ et $2X^n$ coïncident en une infinité de points, donc sont égaux : $\Phi(R) = 2X^n$. Par unicité, $R = E_n$.

Cas n pair, $n > 0$: en $X = 0$, $E_n(0) = E_n(1)$. Par ailleurs (1) en $X = 0$ donne $E_n(0) + E_n(1) = 2 \cdot 0^n = 0$ (car $n > 0$). Donc $E_n(0) = E_n(1) = 0$.

Cas n impair : en $X = \frac{1}{2}$, $E_n\left(\frac{1}{2}\right) = -E_n\left(\frac{1}{2}\right)$, donc $E_n\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

Conclusion

$E_n(X) = (-1)^n E_n(1 - X)$; pour n pair non nul, $E_n(0) = E_n(1) = 0$; pour n impair, $E_n\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

2.2. (f) E_3 et E_4 .

Méthode 1 — Par intégration de $E'_n = nE_{n-1}$.

Deux polynômes de même dérivée diffèrent d'une constante. Comme

$E'_3 = 3E_2 = 3X^2 - 3X$, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $E_3 = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + c$. Comme 3 est

impair, $E_3\left(\frac{1}{2}\right) = 0$: $\frac{1}{8} - \frac{3}{8} + c = 0$, donc $c = \frac{1}{4}$.

De même $E'_4 = 4E_3 = 4X^3 - 6X^2 + 1$, donc $E_4 = X^4 - 2X^3 + X + c'$, et comme 4 est pair non nul, $E_4(0) = 0$, d'où $c' = 0$.

Méthode 2 — Par le système triangulaire de 2.2.(b).

Pour $n = 3$: $a_{3,3} = 1$; $a_{3,2} = -\frac{1}{2}\binom{3}{2} = -\frac{3}{2}$;

$a_{3,1} = -\frac{1}{2}\left[\binom{2}{1}a_{3,2} + \binom{3}{1}a_{3,3}\right] = -\frac{1}{2}(-3 + 3) = 0$;

$$a_{3,0} = -\frac{1}{2}[a_{3,1} + a_{3,2} + a_{3,3}] = -\frac{1}{2}\left(0 - \frac{3}{2} + 1\right) = \frac{1}{4}.$$

Pour $n = 4$: $a_{4,4} = 1$; $a_{4,3} = -\frac{1}{2}\binom{4}{3} = -2$;

$a_{4,2} = -\frac{1}{2}\left[\binom{3}{2}a_{4,3} + \binom{4}{2}a_{4,4}\right] = -\frac{1}{2}(-6 + 6) = 0$;

$$a_{4,1} = -\frac{1}{2}\left[\binom{2}{1}a_{4,2} + \binom{3}{1}a_{4,3} + \binom{4}{1}a_{4,4}\right] = -\frac{1}{2}(0 - 6 + 4) = 1;$$

$$a_{4,0} = -\frac{1}{2}[a_{4,1} + a_{4,2} + a_{4,3} + a_{4,4}] = -\frac{1}{2}(1 + 0 - 2 + 1) = 0.$$

Comparaison : la méthode 1 réutilise les propriétés structurelles (dérivation, symétrie)

et évite presque tout calcul ; la méthode 2 est purement algorithmique et s'applique sans avoir établi ces propriétés, mais devient vite lourde quand n grandit.

Vérification pour $E_3 : X^3 + (X + 1)^3 = 2X^3 + 3X^2 + 3X + 1$ et $-\frac{3}{2} [X^2 + (X + 1)^2] = -3X^2 - 3X - \frac{3}{2}$, donc $E_3(X) + E_3(X + 1) = 2X^3 + 1 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2X^3$.

Conclusion

$$E_3(X) = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{4} \text{ et } E_4(X) = X^4 - 2X^3 + X.$$

PROBLÈME

3.1. Étude d'une variable aléatoire X

3.1.1. (a) Tableau de variations de F .

F est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables, de dénominateur $1 + e^x > 0$, et :

$$f(x) = F'(x) = \frac{e^x(1 + e^x) - e^x \cdot e^x}{(1 + e^x)^2} = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2} > 0.$$

Limites : en $-\infty$, $e^x \rightarrow 0$ donc $F(x) \rightarrow 0$; en $+\infty$, $F(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}} \rightarrow 1$. Enfin

$$F(0) = \frac{1}{2}.$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		+	$\frac{1}{4}$	+	
F	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	1

Conclusion

F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, de 0 à 1 ; (Γ) admet les asymptotes horizontales $y = 0$ en $-\infty$ et $y = 1$ en $+\infty$.

3.1.1. (b) Centre de symétrie et tangente en Ω .

Le point $\Omega \left(0, \frac{1}{2}\right)$ est centre de symétrie de (Γ) si et seulement si, pour tout réel x , le symétrique $(-x, 1 - F(x))$ du point $(x, F(x))$ appartient à (Γ) , c'est-à-dire $F(-x) + F(x) = 1$. Or :

$$F(-x) + F(x) = \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} + \frac{e^x}{1 + e^x} = \frac{1}{e^x + 1} + \frac{e^x}{1 + e^x} = 1.$$

Tangente en Ω : $F(0) = \frac{1}{2}$ et $f(0) = \frac{1}{4}$, donc $(\Delta) : y = \frac{x}{4} + \frac{1}{2}$.

Conclusion

Ω est centre de symétrie de (Γ) et (Δ) a pour équation $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$.

3.1.1. (c) Parité de f et concavité de (Γ) .

Méthode 1 — Calcul direct.

Pour tout réel x , en multipliant numérateur et dénominateur par e^{2x} :

$$f(-x) = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} = \frac{e^{-x}e^{2x}}{(e^x(1 + e^{-x}))^2} = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} = f(x).$$

Méthode 2 — Dérivation de la relation de symétrie.

La relation $F(-x) + F(x) = 1$, valable pour tout x , se dérive : $-F'(-x) + F'(x) = 0$, soit $f(-x) = f(x)$.

Comparaison : la méthode 1 est un calcul autonome ; la méthode 2 montre que la parité de la dérivée est une conséquence de la symétrie centrale de (Γ) , ce qui se généralise à toute courbe symétrique par rapport à un point de l'axe des ordonnées.

Concavité : f est dérivable et, en écrivant $f(x) = e^x(1 + e^x)^{-2}$:

$$F''(x) = f'(x) = e^x(1 + e^x)^{-2} - 2e^{2x}(1 + e^x)^{-3} = \frac{e^x(1 + e^x - 2e^x)}{(1 + e^x)^3} = \frac{e^x(1 - e^x)}{(1 + e^x)^3}.$$

$F''(x) > 0$ pour $x < 0$, $F''(0) = 0$, $F''(x) < 0$ pour $x > 0$.

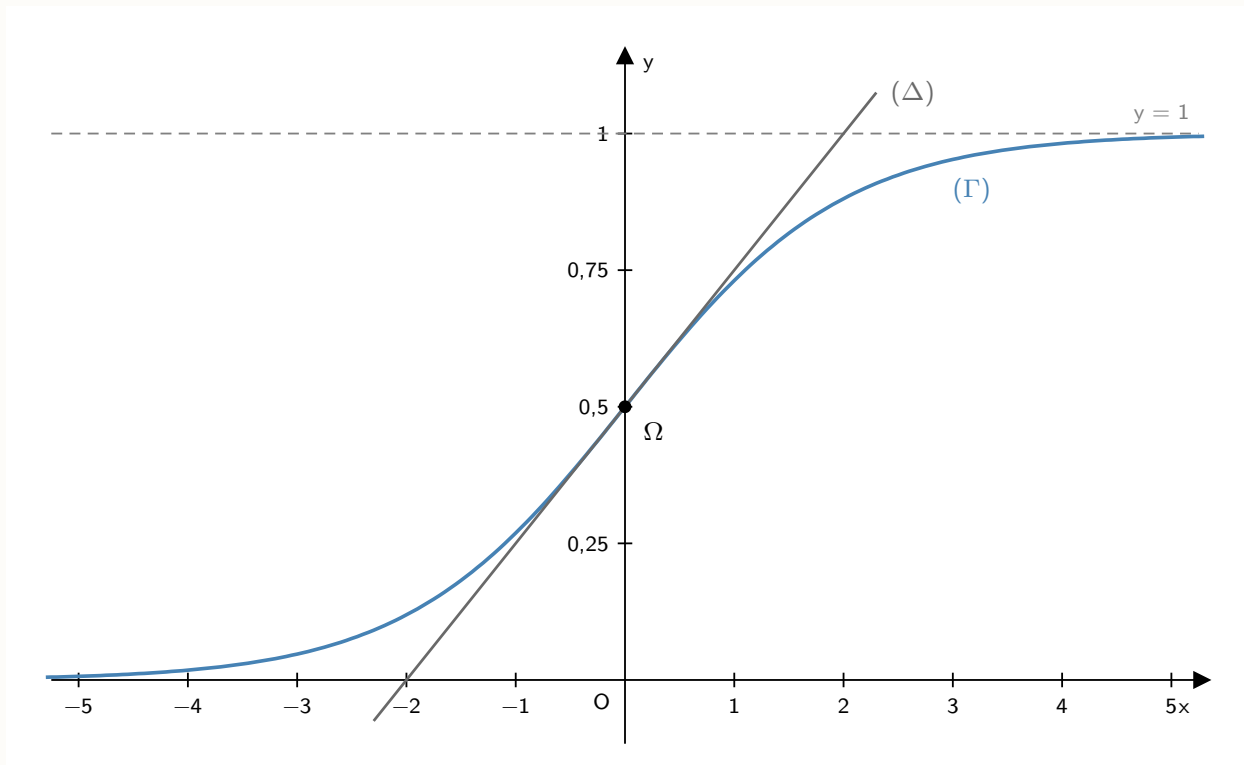
Conclusion

f est paire ; F est convexe sur $] -\infty, 0]$ et concave sur $[0, +\infty[$; Ω est un point d'inflexion. En particulier (Γ) est au-dessus de (Δ) pour $x \leq 0$ et au-dessous pour $x \geq 0$: la tangente traverse la courbe en Ω .

3.1.1. (d) Construction de (Γ) et (Δ) .

On utilise les résultats précédents : asymptotes $y = 0$ et $y = 1$, croissance stricte, centre de symétrie et point d'inflexion Ω , tangente de pente $\frac{1}{4}$ en Ω , convexité à gauche de 0 et concavité à droite. La figure respecte le rapport des unités (2 cm en abscisse pour 10 cm en ordonnée, soit une échelle verticale cinq fois plus grande). Quelques valeurs :

$F(\pm 1) \approx 0,731$ et $0,269$, $F(\pm 2) \approx 0,881$ et $0,119$, $F(\pm 4) \approx 0,982$ et $0,018$.



Conclusion

la courbe a la forme d'un «S» symétrique par rapport à Ω , traversée en Ω par sa tangente (Δ) .

3.1.1. (e) Bijection et réciproque.

F est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$, avec $\lim_{-\infty} F = 0$ et $\lim_{+\infty} F = 1$; par le théorème de la bijection, F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$.

Pour $y \in]0, 1[$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$F(x) = y \iff e^x = y(1 + e^x) \iff e^x(1 - y) = y \iff e^x = \frac{y}{1 - y} \iff x = \ln \frac{y}{1 - y},$$

ce qui est licite car $1 - y > 0$ et $\frac{y}{1 - y} > 0$.

Conclusion

$$\forall x \in]0, 1[, F^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right).$$

3.1.1. (f) f est une densité de probabilité.

f est continue et positive sur $\mathbb{R}$. Pour $A < B$, $\int_A^B f(x) dx = F(B) - F(A)$, qui tend vers $1 - 0 = 1$ lorsque $A \rightarrow -\infty$ et $B \rightarrow +\infty$. Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ converge et vaut 1.

Conclusion

f est une densité de probabilité; de plus, pour une variable X de densité f , $P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f = F(x) - \lim_{-\infty} F = F(x)$: F est sa fonction de répartition.

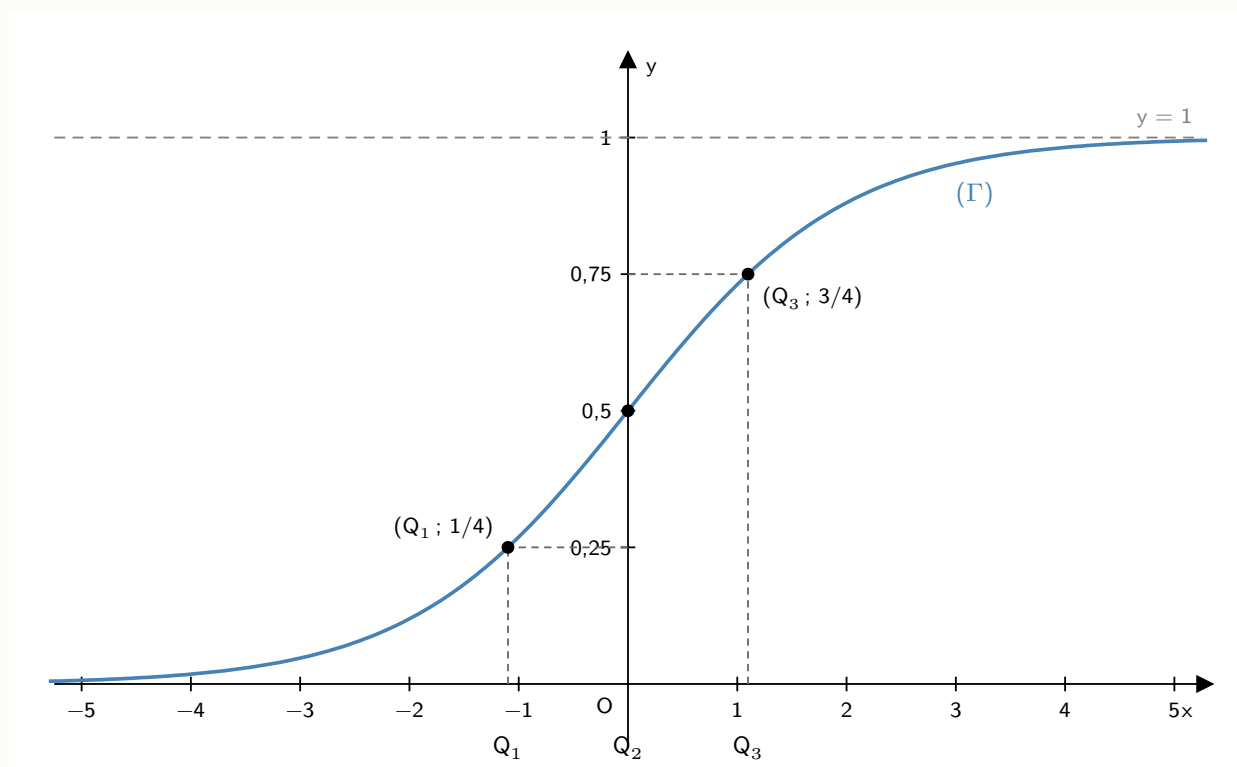
3.1.2. (a) Quartiles de X .

La fonction de répartition de X est F , bijective de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$; comme $\frac{i}{4} \in]0, 1[$, l'équation $F(Q_i) = \frac{i}{4}$ a une unique solution :

$$Q_i = F^{-1}\left(\frac{i}{4}\right) = \ln\left(\frac{i/4}{1-i/4}\right) = \ln\left(\frac{i}{4-i}\right).$$

Conclusion

$Q_1 = -\ln 3 \approx -1,10$, $Q_2 = 0$ et $Q_3 = \ln 3 \approx 1,10$; on retrouve $Q_1 = -Q_3$, conséquence de la symétrie de centre Ω . Ils sont placés sur la figure ci-dessous.



3.1.2. (b) Plus petit réel α tel que $P(|X| > \alpha) \leq \varepsilon$.

On calcule $P(|X| > \alpha)$ en fonction de α , puis on résout l'inéquation.

Si $\alpha < 0$, l'événement $[|X| > \alpha]$ est certain et $P(|X| > \alpha) = 1 > \varepsilon$: aucun $\alpha < 0$ ne convient.

Si $\alpha \geq 0$, $[|X| > \alpha]$ est la réunion disjointe de $[X > \alpha]$ et $[X < -\alpha]$. Comme X est à densité, $P(X < -\alpha) = F(-\alpha)$, et par 3.1.1.(b), $F(-\alpha) = 1 - F(\alpha)$:

$$P(|X| > \alpha) = 1 - F(\alpha) + F(-\alpha) = 2(1 - F(\alpha)) = \frac{2}{1 + e^{\alpha}}.$$

Alors, pour $\alpha \geq 0$:

$$\frac{2}{1 + e^{\alpha}} \leq \varepsilon \iff 1 + e^{\alpha} \geq \frac{2}{\varepsilon} \iff e^{\alpha} \geq \frac{2 - \varepsilon}{\varepsilon} \iff \alpha \geq \ln\left(\frac{2 - \varepsilon}{\varepsilon}\right).$$

Comme $\varepsilon \in]0, 1[$, $\frac{2 - \varepsilon}{\varepsilon} > 1$, donc $\ln \frac{2 - \varepsilon}{\varepsilon} > 0$: la condition $\alpha \geq 0$ est

automatiquement remplie. L'ensemble des réels convenables est $\left[\ln \frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}, +\infty \right]$, qui admet un plus petit élément.

Conclusion

$$\alpha = \ln \left(\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon} \right) = \ln \left(\frac{2}{\varepsilon} - 1 \right).$$

3.1.2. (c) Espérance de X .

Existence : il faut prouver la convergence absolue de $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$. Pour $x \geq 0$, $f(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} \leq e^{-x}$ (forme obtenue en 3.1.1.(c)), donc par parité $0 \leq f(x) \leq e^{-|x|}$ pour tout réel x , et $0 \leq |x|f(x) \leq |x|e^{-|x|}$.

Or $\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$ converge (elle vaut $\Gamma(2) = 1$). Par comparaison de fonctions positives, $\int_0^{+\infty} |x|f(x) dx$ converge, et par parité de $x \mapsto |x|f(x)$ (changement de variable affine $x = -t$), $\int_{-\infty}^0 |x|f(x) dx$ converge aussi. Donc X admet une espérance.

Calcul.

Méthode 1 — Imparité de l'intégrande.

Par le changement de variable affine $x = -t$ et la parité de f :

$$\int_{-\infty}^0 x f(x) dx = - \int_0^{+\infty} t f(t) dt. \text{ Donc } E(X) = \int_{-\infty}^0 x f(x) dx + \int_0^{+\infty} x f(x) dx = 0.$$

Méthode 2 — Symétrie de la loi.

Pour tout réel x , $P(-X \leq x) = P(X \geq -x) = 1 - F(-x) = F(x)$. Donc $-X$ a même loi que X , donc même espérance, et par linéarité $E(X) = E(-X) = -E(X)$, d'où $E(X) = 0$.

Comparaison : la méthode 1 est un calcul d'intégrale ; la méthode 2 n'utilise que la symétrie de la loi, et s'applique à toute variable de loi symétrique admettant une espérance, qu'elle soit à densité ou discrète.

Conclusion

X admet une espérance et $E(X) = 0$.

3.2. Calcul des deux intégrales

3.2.1. (a) Convergence de J .

La fonction $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$ est continue sur $]0, 1]$ et, comme $\ln(1+x) \sim x$ en 0, elle tend vers 1 en 0^+ : elle est prolongeable par continuité à droite en 0.

Conclusion

d'après le résultat rappelé, J est convergente.

3.2.1. (b) Monotonie et bornes de h ; convergence de I .

Posons $u(x) = \frac{\ln x}{1+x}$, continue sur $]0, 1]$. Comme $h(\varepsilon) = -\int_1^\varepsilon u(x) dx$, h est dérivable sur $]0, 1]$ (théorème fondamental) et :

$$h'(\varepsilon) = -u(\varepsilon) = -\frac{\ln \varepsilon}{1+\varepsilon} \geq 0 \quad \text{car } \ln \varepsilon \leq 0.$$

Donc h est croissante sur $]0, 1]$.

Majoration : pour $x \in]0, 1]$, $u(x) \leq 0$, et $\varepsilon \leq 1$, donc $h(\varepsilon) \leq 0$.

Minoration : pour $x \in]0, 1]$, $\ln x \leq 0$ et $1+x \geq 1$, donc $u(x) \geq \ln x$. Par croissance de l'intégrale sur $[\varepsilon, 1]$:

$$h(\varepsilon) \geq \int_{\varepsilon}^1 \ln x \, dx = [x \ln x - x]_{\varepsilon}^1 = -1 - \varepsilon \ln \varepsilon + \varepsilon \geq -1,$$

car $\varepsilon > 0$ et $-\varepsilon \ln \varepsilon \geq 0$.

Ainsi $-1 \leq h(\varepsilon) \leq 0$ pour tout $\varepsilon \in]0, 1]$.

Convergence de I : h est croissante et minorée par -1 sur $]0, 1]$; par le théorème de la limite monotone, h admet en 0^+ une limite finie (c'est aussi le critère de convergence des intégrales de fonctions de signe constant : $-u \geq 0$ et ses intégrales partielles $-h(\varepsilon)$ sont majorées par 1).

Conclusion

h est croissante et bornée sur $]0, 1]$, et l'intégrale $I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} h(\varepsilon)$ est convergente, avec $-1 \leq I \leq 0$.

3.2.2. Relation (2).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1]$. Comme $-x \neq 1$, la somme géométrique de raison $-x$ donne :

$$\sum_{k=0}^n (-x)^k = \frac{1 - (-x)^{n+1}}{1 + x}, \quad \text{donc} \quad \frac{1}{1 + x} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + \frac{(-x)^{n+1}}{1 + x}.$$

En isolant le terme $k = 0$ et en écrivant $(-x)^{n+1} = (-1)^{n+1} x^{n+1}$:

Conclusion

$$\frac{1}{1 + x} = 1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k x^k + \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1 + x}.$$

3.2.3. Convergence et calcul de I_k .

La fonction $x \mapsto x^k \ln x$ est continue sur $]0, 1]$. On intègre par parties sur un segment $[\varepsilon, 1]$, $\varepsilon \in]0, 1]$, puis on passe à la limite.

Les fonctions $x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto \frac{x^{k+1}}{k+1}$ sont de classe C^1 sur $[\varepsilon, 1]$, donc :

$$\int_{\varepsilon}^1 x^k \ln x \, dx = \left[\frac{x^{k+1}}{k+1} \ln x \right]_{\varepsilon}^1 - \int_{\varepsilon}^1 \frac{x^k}{k+1} \, dx = -\frac{\varepsilon^{k+1} \ln \varepsilon}{k+1} - \frac{1 - \varepsilon^{k+1}}{(k+1)^2}.$$

Lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$, $\varepsilon^{k+1} \ln \varepsilon \rightarrow 0$ par croissances comparées ($k+1 \geq 1$) et $\varepsilon^{k+1} \rightarrow 0$.

Conclusion

pour tout $k \in \mathbb{N}$, I_k converge et $I_k = -\frac{1}{(k+1)^2}$.

3.2.4. Variations de ρ .

ρ est continue sur $[0, 1]$ (car $x \ln x \rightarrow 0$ en 0^+) et dérivable sur $]0, 1]$ avec $\rho'(x) = \ln x + 1$, qui est strictement négatif sur $]0, \frac{1}{e}[$, nul en $\frac{1}{e}$ et strictement positif sur $]\frac{1}{e}, 1]$.

x	0		$\frac{1}{e}$		1
$\rho'(x)$		—	0	+	1
ρ	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	0

Conclusion

ρ décroît de 0 à $-\frac{1}{e}$ sur $\left[0, \frac{1}{e}\right]$ puis croît de $-\frac{1}{e}$ à 0 sur $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$; en particulier, pour tout $x \in [0, 1]$, $-\frac{1}{e} \leq \rho(x) \leq 0$, donc $|\rho(x)| \leq \frac{1}{e}$.

3.2.5. Encadrement et somme de la série

$$\sum \frac{(-1)^k}{k^2}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En multipliant (2) par $\ln x$, pour $x \in]0, 1]$:

$$\frac{\ln x}{1+x} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k \ln x + (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1} \ln x}{1+x}.$$

Le dernier terme s'écrit $(-1)^{n+1} \frac{x^n \rho(x)}{1+x}$: il se prolonge par continuité en 0 (par 0), donc son intégrale sur $]0, 1]$ converge. Les intégrales I (3.2.1) et I_k (3.2.3) convergent aussi ; par linéarité des intégrales convergentes :

$$I - \sum_{k=0}^n (-1)^k I_k = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n \rho(x)}{1+x} dx.$$

D'après 3.2.4, pour $x \in]0, 1]$, $\left| \frac{x^n \rho(x)}{1+x} \right| \leq \frac{x^n}{e}$, d'où :

$$\left| I - \sum_{k=0}^n (-1)^k I_k \right| \leq \int_0^1 \frac{x^n}{e} dx = \frac{1}{e(n+1)}.$$

Série : notons

$$S_N = \sum_{m=1}^N \frac{(-1)^m}{m^2}.$$

Par 3.2.3, et avec $m = k+1$, $(-1)^k = -(-1)^m$:

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k I_k = - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(k+1)^2} = \sum_{m=1}^{n+1} \frac{(-1)^m}{m^2} = S_{n+1}.$$

Donc $|I - S_{n+1}| \leq \frac{1}{e(n+1)} \rightarrow 0$: la suite $(S_N)_{N \geq 2}$ converge vers I .

Remarque : la convergence de la série peut aussi se voir directement, car $\left| \frac{(-1)^k}{k^2} \right| = \frac{1}{k^2}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente ($2 > 1$) ; la convergence absolue entraîne la convergence. Mais seule l'inégalité précédente donne la valeur de la somme.

Conclusion

l'inégalité demandée est établie, la série de terme général $\frac{(-1)^k}{k^2}$ converge et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = I.$$

3.2.6. (a) Décomposition de θ .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, 1]$. On intègre (2), écrite pour la variable $t \in [0, x]$, entre 0 et x (toutes les fonctions sont continues sur $[0, x]$) :

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = x + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t} dt.$$

En divisant par $x > 0$:

$$\theta(x) = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k+1} x^k + R_n(x), \quad R_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{x} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t} dt.$$

On pose $R_n(0) = 0$, ce qui est cohérent avec $\theta(0) = 1$. Ainsi, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$R_n(x) = \theta(x) - 1 - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k+1} x^k.$$

Majoration : pour $t \in [0, x]$, $0 \leq \frac{t^{n+1}}{1+t} \leq t^{n+1}$, donc pour $x \in]0, 1]$:

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{x} \int_0^x t^{n+1} dt = \frac{x^{n+1}}{n+2},$$

et l'inégalité est triviale en $x = 0$.

Conclusion

la fonction R_n ainsi définie convient :

$$\theta(x) = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k+1} x^k + R_n(x)$$

et $|R_n(x)| \leq \frac{x^{n+1}}{n+2}$ pour tout $x \in [0, 1]$.

3.2.6. (b) Encadrement de $\int_0^1 \theta$ et relation $J = -I$.

$$R_n = \theta - \left(1 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k+1} x^k \right)$$

est continue sur $[0, 1]$ comme différence de fonctions continues. En intégrant sur le segment $[0, 1]$:

$$\int_0^1 \theta(x) dx = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{(k+1)^2} + \int_0^1 R_n(x) dx = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(k+1)^2} + \int_0^1 R_n(x) dx,$$

et :

$$\left| \int_0^1 R_n(x) dx \right| \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+2} dx = \frac{1}{(n+2)^2}.$$

Relation avec J : θ est continue sur $[0, 1]$ et coïncide sur $]0, 1]$ avec l'intégrande de J . La

fonction $\varepsilon \mapsto \int_{\varepsilon}^1 \theta$ est continue sur $[0, 1]$ (elle a pour dérivée $-\theta$), donc

$$J = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \theta = \int_0^1 \theta(x) dx.$$

Par ailleurs, d'après 3.2.5,

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(k+1)^2} = -S_{n+1}.$$

L'inégalité s'écrit donc $|J + S_{n+1}| \leq \frac{1}{(n+2)^2}$, qui tend vers 0 : ainsi $S_{n+1} \rightarrow -J$.

Comme $S_{n+1} \rightarrow I$ (3.2.5), l'unicité de la limite donne $I = -J$.

Conclusion

l'inégalité demandée est établie et $J = -I$.

3.2.7. Valeurs de I et J .

On sépare les termes d'indices pairs et impairs dans les sommes partielles d'indice pair. Notons

$$T_N = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2},$$

de limite $\frac{\pi^2}{6}$. Pour $N \in \mathbb{N}^*$:

$$S_{2N} = \sum_{p=1}^N \frac{1}{(2p)^2} - \sum_{p=1}^N \frac{1}{(2p-1)^2}.$$

Or

$$\sum_{p=1}^N \frac{1}{(2p)^2} = \frac{1}{4} T_N$$

et

$$\sum_{p=1}^N \frac{1}{(2p-1)^2} = T_{2N} - \frac{1}{4} T_N$$

(les entiers de 1 à $2N$ sont les N pairs et les N impairs). Donc :

$$S_{2N} = \frac{1}{2} T_N - T_{2N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{6} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

Comme (S_N) converge vers I (3.2.5), sa sous-suite (S_{2N}) converge aussi vers I ; par unicité de la limite, $I = -\frac{\pi^2}{12}$, puis $J = -I$ par 3.2.6.

Conclusion

$$J = -I = \frac{\pi^2}{12}.$$

3.3. Calcul de la variance de X

3.3.1. Existence de la variance.

Il suffit de montrer que X admet un moment d'ordre 2, c'est-à-dire que $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$ converge (fonction positive).

D'après 3.1.2.(c), $0 \leq x^2 f(x) \leq x^2 e^{-|x|}$ pour tout réel x . Or $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx$ converge et vaut $\Gamma(3) = 2! = 2$. Par comparaison de fonctions positives, $\int_0^{+\infty} x^2 f(x) dx$ converge ;

par parité de $x \mapsto x^2 f(x)$ (changement de variable affine $x = -t$), $\int_{-\infty}^0 x^2 f(x) dx$ converge aussi.

Conclusion

par le théorème de transfert, $E(X^2)$ existe, donc X admet une variance.

3.3.2. Expression intégrale de $V(X)$.

Question adaptée au programme actuel : le changement de variable, non affine, est précisé dans l'énoncé : $t = e^{-x}$.

Par Koenig-Huygens, $E(X) = 0$ (3.1.2.(c)) et le théorème de transfert :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = 2 \int_0^{+\infty} x^2 f(x) dx,$$

la dernière égalité provenant de la parité de $x \mapsto x^2 f(x)$ (changement de variable $x = -t$ sur $] -\infty, 0]$).

Changement de variable sur un segment : soit $B > 0$. L'application $t \mapsto -\ln t$ est de classe C^1 et bijective de $[e^{-B}, 1]$ sur $[0, B]$; avec $x = -\ln t$, $dx = -\frac{dt}{t}$ et

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} = \frac{t}{(1 + t)^2} :$$

$$\int_0^B x^2 f(x) dx = \int_1^{e^{-B}} (\ln t)^2 \frac{t}{(1 + t)^2} \left(-\frac{1}{t}\right) dt = \int_{e^{-B}}^1 \frac{(\ln t)^2}{(1 + t)^2} dt.$$

Passage à la limite : l'intégrale $\int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{(1 + t)^2} dt$ converge, car $0 \leq \frac{(\ln t)^2}{(1 + t)^2} \leq (\ln t)^2$ et

$(\ln t)^2 = o(t^{-1/2})$ en 0^+ (puisque $\sqrt{t}(\ln t)^2 \rightarrow 0$ par croissances comparées), avec $\int_0^1 t^{-1/2} dt$ convergente (Riemann, $\frac{1}{2} < 1$). Comme $e^{-B} \rightarrow 0^+$ lorsque $B \rightarrow +\infty$, le

membre de droite tend vers $\int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{(1 + t)^2} dt$, et le membre de gauche vers

$$\int_0^{+\infty} x^2 f(x) dx.$$

Conclusion

$$V(X) = 2 \int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{(1+x)^2} dx.$$

3.3.3. Dérivée de ψ et limite de $(\ln x)\psi(x)$.

ψ est dérivable sur $]0, 1]$ et, pour $x \in]0, 1]$:

$$\psi'(x) = \frac{(\ln x + 1)(1+x) - x \ln x}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{\ln x + 1 + x}{(1+x)^2} - \frac{1+x}{(1+x)^2} = \frac{\ln x}{(1+x)^2}.$$

Limite : pour $x \in]0, 1]$,

$$(\ln x)\psi(x) = \frac{x(\ln x)^2}{1+x} - \ln x \ln(1+x) = \frac{x(\ln x)^2}{1+x} - (x \ln x) \cdot \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

Par croissances comparées, $x(\ln x)^2 \rightarrow 0$ et $x \ln x \rightarrow 0$ en 0^+ ; de plus $\frac{1}{1+x} \rightarrow 1$ et $\frac{\ln(1+x)}{x} \rightarrow 1$.

Conclusion

$$\psi'(x) = \frac{\ln x}{(1+x)^2} \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} (\ln x)\psi(x) = 0.$$

3.3.4. $V(X) = 2(J - I)$ et valeur de $V(X)$.

On intègre par parties sur $[\varepsilon, 1]$, $\varepsilon \in]0, 1]$, en écrivant $\frac{(\ln x)^2}{(1+x)^2} = \ln x \cdot \psi'(x)$; les fonctions $\ln$ et ψ sont de classe C^1 sur $[\varepsilon, 1]$:

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{(\ln x)^2}{(1+x)^2} dx = [\ln x \psi(x)]_{\varepsilon}^1 - \int_{\varepsilon}^1 \frac{\psi(x)}{x} dx = -(\ln \varepsilon) \psi(\varepsilon) - \int_{\varepsilon}^1 \left(\frac{\ln x}{1+x} - \frac{\ln(1+x)}{x} \right) dx.$$

Donc :

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{(\ln x)^2}{(1+x)^2} dx = -(\ln \varepsilon) \psi(\varepsilon) - h(\varepsilon) + \int_{\varepsilon}^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx.$$

Lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$: $(\ln \varepsilon) \psi(\varepsilon) \rightarrow 0$ (3.3.3), $h(\varepsilon) \rightarrow I$ (3.2.1.(b)) et $\int_{\varepsilon}^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx \rightarrow J$ (3.2.1.(a)). Ainsi $\int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{(1+x)^2} dx = J - I$ et, par 3.3.2, $V(X) = 2(J - I)$.

Avec 3.2.7 : $V(X) = 2 \left(\frac{\pi^2}{12} + \frac{\pi^2}{12} \right) = \frac{\pi^2}{3}$.

Conclusion

$$V(X) = 2(J - I) = \frac{\pi^2}{3} \approx 3,29.$$

Relevé des adaptations

Exercice 2, préambule et 2.2.(a) : la notation ancienne C_k^j est remplacée par $\binom{k}{j}$, définie dans l'énoncé; la coquille $E(X)$ est rectifiée en $E_n(X)$.

Exercice 2, 2.2.(b) : «Préciser la valeur de $a_{n,k}$ » est rectifié en «Préciser la valeur de $a_{n,n}$ », le système ne fournissant pas de formule close pour tous les coefficients; le coefficient dominant est celui dont la valeur est déterminée directement.

Exercice 2, 2.2.(d) : « pour tout entier naturel n » est rectifié en « pour tout entier naturel non nul n », car E_{-1} n'est pas défini.

Problème, 3.3.2 : le changement de variable non affine $t = e^{-x}$ est indiqué dans l'énoncé, conformément au programme.

Problème, 3.1.1.(d) et 3.1.2.(a) : les figures demandées sont tracées dans le corrigé en SVG, calculées exactement à partir de l'expression de F ; l'énoncé original ne comporte aucune figure.