



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

Ecricome

Mathématiques

1995

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice 1

Dans cet exercice :

- E désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels ;
- $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels ;
- $GL_3(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices inversibles.

On considère l'application f qui, à tout élément P de E , associe le polynôme Q défini par :

$$Q(X) = (2X + 1)P(X) - (X^2 - 1)P'(X)$$

1 - Montrer que f est un endomorphisme de E .

2 - Soit B un vecteur propre pour f , c'est-à-dire un élément non nul de E tel qu'il existe un réel λ satisfaisant à la relation $f(B) = \lambda B$.

a. Montrer que B est nécessairement de degré 2.

b. On suppose que $\lambda = 3$. Montrer que -1 est racine de B .

Soit k l'ordre de multiplicité de la racine -1 ; il existe donc un polynôme A tel que :

$$B(X) = (X + 1)^k A(X) \text{ avec } A(-1) \neq 0.$$

Montrer que $k = 2$ et que A est constant.

En déduire que $\lambda = 3$ est une valeur propre de f et déterminer les vecteurs propres associés.

c. En supposant $\lambda = -1$, étudier de même la multiplicité de la racine 1.

En déduire que $\lambda = -1$ est valeur propre de f et déterminer les vecteurs propres associés.

d. On suppose maintenant que $\lambda \neq 3$ et $\lambda \neq -1$.

Montrer que 1 et -1 sont des racines de B .

En déduire une factorisation des polynômes B obtenus, ainsi que la valeur propre associée à B .

3 - Étude d'un cas particulier. Soit F le sous-espace vectoriel de E constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à deux et g la restriction de f à F . On désigne par $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de F .

a. Montrer que g est un endomorphisme de F .

b. Écrire la matrice A de g relativement à la base $\mathcal{B}$.

c. Montrer qu'il existe une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice P de $GL_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PD^nP^{-1}$$

d. Expliciter A^n en fonction de n .

Exercice 2

On désigne par x un réel tel que $x > 1$ et l'on se propose d'étudier la série de terme général $u_n(x) = \frac{1}{n^x}$ pour $n \geq 1$.

Lorsque la série converge, sa somme est notée :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x).$$

1 - Étude de la dérivabilité de f .

a. Justifier la convergence de la série définissant f .

b. Déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\frac{x+1}{n^2} \ln^2(n) u_n(x)$.

En déduire la convergence de la série de terme général $\ln^2(n) u_n(x)$ et a fortiori la convergence de la série de terme général $\ln(n) u_n(x)$.

c. Pour $x > 1$ et pour tout réel h tel que $|h| \leq \frac{x-1}{2}$, montrer en utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange que :

$$|u_n(x+h) - u_n(x) + h \ln(n) u_n(x)| \leq \frac{h^2}{2} u_n\left(\frac{x+1}{2}\right) \ln^2(n)$$

puis que :

$$\left| f(x+h) - f(x) + h \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n) u_n(x) \right| \leq \frac{h^2}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \ln^2(n) u_n\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

d. En déduire que f est dérivable sur $]1, +\infty[$ et donner une expression de la dérivée de f sous la forme de la somme d'une série.

2 - Représentation de f .

a. Pour $x > 1$ et pour k entier naturel non nul, vérifier que l'on a l'encadrement suivant :

$$\frac{1}{(k+1)^x} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^x} \leq \frac{1}{k^x}$$

et que, pour tout entier $N \geq 1$:

$$\int_2^{N+1} \frac{dt}{t^x} \leq \sum_{n=2}^N \frac{1}{n^x} \leq \int_1^N \frac{dt}{t^x}$$

b. Prouver alors que :

$$1 + \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leq f(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1}$$

c. Préciser les limites de f quand x tend vers 1 par valeurs supérieures, et quand x tend vers $+\infty$.

d. Dédurre des questions précédentes les variations de f et donner l'allure de sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormal d'unité 4 cm.

On admettra que $f(2) = \frac{\pi^2}{6}$ et $f(4) = \frac{\pi^4}{90}$.

Problème

On dispose de deux urnes A et B contenant respectivement a et b boules (a et b sont deux entiers naturels non nuls).

On procède alors à l'expérience suivante : on choisit une des urnes pour en extraire une boule que l'on met dans l'autre urne, en admettant que la probabilité de choisir l'urne A est q et que la probabilité de choisir B est p , avec $p + q = 1$ et $p \in]0, 1[$.

On répète cette épreuve jusqu'à ce que l'une des urnes soit vide, si cela se produit, ou bien indéfiniment. On pose $x = \frac{q}{p}$.

1 - Étude d'une suite récurrente.

On considère la suite finie $U = (U_n)_{0 \leq n \leq a+b}$ définie par la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \{1, \dots, a+b-1\}, \quad U_n = pU_{n+1} + qU_{n-1}$$

U_0 et U_{a+b} étant des réels donnés.

a. Prouver que l'on a, pour tout $n \in \{1, \dots, a+b-1\}$: $p(U_{n+1} - U_n) = q(U_n - U_{n-1})$.

b. Lorsque $p = q$, montrer que la suite U est une suite arithmétique.

En déduire U_n en fonction de n, a, b, U_0 et U_{a+b} .

c. Lorsque p est différent de q , montrer qu'il existe deux constantes réelles α et β telles que :

$$\forall n \in \{0, \dots, a+b\}, \quad U_n = \alpha + \beta x^n$$

Déterminer U_n en fonction de n, a, b, U_0 et U_{a+b} .

2 - Étude de la probabilité de voir l'expérience se terminer.

Soit k un entier tel que $0 \leq k \leq a+b$.

On note E_k l'événement : « à partir d'un contenu de k boules dans l'urne A , l'expérience s'arrête parce que l'urne A est vide ».

Ainsi $P(E_0) = 1$ et $P(E_{a+b}) = 0$.

Et enfin, on note A l'événement : « le premier tirage se fait dans A ».

a. Pour k un entier tel que $1 \leq k \leq a+b-1$, établir une relation entre $P(E_k)$, $P(E_{k+1})$ et $P(E_{k-1})$.

b. i. En utilisant les résultats de la partie 1, calculer la probabilité $P(E_a)$ de voir l'expérience se terminer par le vidage de A .

ii. Calculer la limite de $P(E_a)$ lorsque b tend vers $+\infty$.

iii. Pour p différent de q , déterminer la limite de $P(E_a)$ lorsque p tend vers 0,5.

c. Quelle est la probabilité de voir l'expérience se terminer par le vidage de l'urne B ?

d. Quelle est la probabilité de voir l'expérience se terminer?

3 - Étude du nombre moyen de tirages effectués pour voir l'expérience se terminer.

Pour k un entier tel que $0 \leq k \leq a + b$, on note X_k la variable aléatoire égale au nombre de tirages qu'il faut effectuer pour vider l'une quelconque des urnes A ou B à partir d'un contenu initial de k boules dans l'urne A . Si l'expérience est sans fin, on pose par convention $X_k = 0$; d'après la question 2.d, on sait que l'événement « l'expérience est sans fin » est de probabilité nulle.

On admet que X_k admet une espérance que l'on note $E(X_k)$.

Ainsi $E(X_0) = 0$ et $E(X_{a+b}) = 0$.

a. Pour j un entier naturel non nul et $1 \leq k \leq a + b - 1$, montrer que :

$$P(X_k = j) = q P(X_{k-1} = j - 1) + p P(X_{k+1} = j - 1)$$

En déduire que $E(X_k) = 1 + q E(X_{k-1}) + p E(X_{k+1})$.

b. Pour $p = q$:

i. Montrer l'existence d'un réel γ tel que la variable $Y_k = X_k + \gamma k^2$ ait une espérance qui vérifie :

$$\forall k \in \{1, \dots, a + b - 1\}, \quad E(Y_k) = \frac{1}{2} E(Y_{k+1}) + \frac{1}{2} E(Y_{k-1})$$

ii. En utilisant la partie 1, montrer que $E(X_a) = ab$.

c. Pour p différent de q :

i. Montrer l'existence d'un réel δ tel que la variable $Z_k = X_k + \delta k$ ait une espérance qui vérifie :

$$\forall k \in \{1, \dots, a + b - 1\}, \quad E(Z_k) = p E(Z_{k+1}) + q E(Z_{k-1})$$

ii. En utilisant la partie 1, montrer que :

$$E(X_a) = \frac{1}{p - q} \left(\frac{(a + b)(x^a - 1)}{x^{a+b} - 1} - a \right)$$

iii. Quelle est la limite de $E(X_a)$ quand b tend vers $+\infty$ dans le cas $p < q$?