



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

Ecricome

Mathématiques

1993

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Corrigé

EXERCICE 1

1. (a) i. Il s'agit de minorer l'intégrale de f sur l'intervalle $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ en utilisant la décroissance de f : sur cet intervalle, f est minorée par sa valeur à l'extrémité droite.

Cas $k \in \{2, \dots, n\}$. L'intervalle $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ est un segment inclus dans $]0, 1]$, sur lequel f est continue. Pour tout x de ce segment, $x \leq \frac{k}{n}$, donc, f étant décroissante, $f(x) \geq f\left(\frac{k}{n}\right)$. Par croissance de l'intégrale (bornes dans l'ordre croissant) :

$$\int_{(k-1)/n}^{k/n} f(x) dx \geq \int_{(k-1)/n}^{k/n} f\left(\frac{k}{n}\right) dx = \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Cas $k = 1$. L'intégrale $\int_0^{1/n} f(x) dx$ est impropre en 0. Elle converge : pour $\varepsilon \in \left]0, \frac{1}{n}\right]$,

on a par la relation de Chasles $\int_{\varepsilon}^{1/n} f(x) dx = \int_{\varepsilon}^1 f(x) dx - \int_{1/n}^1 f(x) dx$, et le membre de droite admet une limite finie quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$ puisque $\int_0^1 f(x) dx$ converge.

Pour $\varepsilon \in \left]0, \frac{1}{n}\right]$ et $x \in \left[\varepsilon, \frac{1}{n}\right]$, la décroissance de f donne $f(x) \geq f\left(\frac{1}{n}\right)$, donc :

$$\int_{\varepsilon}^{1/n} f(x) dx \geq \left(\frac{1}{n} - \varepsilon\right) f\left(\frac{1}{n}\right)$$

En faisant tendre ε vers 0^+ (passage à la limite dans une inégalité large), on obtient

$$\int_0^{1/n} f(x) dx \geq \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right).$$

Conclusion

$$\text{pour tout } k \in \{1, \dots, n\}, \quad \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{(k-1)/n}^{k/n} f(x) dx.$$

- ii. Soit $k \in \{1, \dots, n-1\}$. Le segment $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ est inclus dans $]0, 1]$ et, pour tout x de ce segment, $x \geq \frac{k}{n}$, donc $f(x) \leq f\left(\frac{k}{n}\right)$ par décroissance de f . Par croissance de l'intégrale :

$$\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(x) dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

- iii. Majoration. On somme les inégalités de i pour k allant de 1 à n . La relation de Chasles, valable pour des intégrales convergentes, donne :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)/n}^{k/n} f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx$$

Minoration. On somme les inégalités de ii pour k allant de 1 à $n-1$ (ce qui a un sens car $n \geq 2$) :

$$\int_{1/n}^1 f(x) dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(x) dx \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = S_n - \frac{f(1)}{n}$$

Conclusion

$$\frac{f(1)}{n} + \int_{1/n}^1 f(x) dx \leq S_n \leq \int_0^1 f(x) dx.$$

Remarque : pour $n = 1$, l'encadrement reste vrai car le membre de gauche vaut $f(1) = S_1$ et l'inégalité de droite découle de i.

(b) On applique le théorème d'encadrement.

La fonction $\varepsilon \mapsto \int_{\varepsilon}^1 f(x) dx$ admet pour limite $\int_0^1 f(x) dx$ en 0^+ (définition de la convergence de l'intégrale impropre). Comme $\frac{1}{n} \rightarrow 0^+$, on en déduit

$$\int_{1/n}^1 f(x) dx \rightarrow \int_0^1 f(x) dx. \text{ De plus } \frac{f(1)}{n} \rightarrow 0.$$

Le membre de gauche de l'encadrement de iii tend donc vers $\int_0^1 f(x) dx$, et le membre de droite est constant égal à cette valeur.

Conclusion

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_0^1 f(x) dx.$$

2. (a) On effectue une intégration par parties sur un segment $[1, A]$, puis on fait tendre A vers $+\infty$.

Soit $A > 1$. Les fonctions $u \mapsto \ln u$ et $u \mapsto -2u^{-1/2}$ sont de classe C^1 sur $[1, A]$, de dérivées respectives $u \mapsto \frac{1}{u}$ et $u \mapsto u^{-3/2}$. Par intégration par parties :

$$\int_1^A \frac{\ln u}{u^{3/2}} du = \left[-\frac{2 \ln u}{\sqrt{u}} \right]_1^A + \int_1^A \frac{2}{u\sqrt{u}} du = -\frac{2 \ln A}{\sqrt{A}} + 2 \left[-\frac{2}{\sqrt{u}} \right]_1^A$$

donc :

$$\int_1^A \frac{\ln u}{u^{3/2}} du = -\frac{2 \ln A}{\sqrt{A}} + 4 - \frac{4}{\sqrt{A}}$$

Par croissances comparées, $\frac{\ln A}{\sqrt{A}} \rightarrow 0$ quand $A \rightarrow +\infty$, et $\frac{4}{\sqrt{A}} \rightarrow 0$. Le membre de droite admet donc une limite finie égale à 4.

Conclusion

l'intégrale I converge et $I = 4$.

Remarque : la convergence peut aussi s'obtenir sans calcul : la fonction intégrée est continue et positive sur $[1, +\infty[$ et $\frac{\ln u}{u^{3/2}} = o\left(\frac{1}{u^{5/4}}\right)$ en $+\infty$ (car $\frac{\ln u}{u^{1/4}} \rightarrow 0$), avec $\int_1^{+\infty} \frac{du}{u^{5/4}}$ convergente (intégrale de Riemann, $\frac{5}{4} > 1$).

(b) Question adaptée au programme actuel : le changement de variable non affine $u = \frac{1}{x}$ est désormais indiqué dans l'énoncé.

Méthode 1 — Changement de variable imposé.

On travaille sur un segment $[\varepsilon, 1]$ avec $\varepsilon \in]0, 1[$, puis on fait tendre ε vers 0^+ .

La fonction $\varphi : u \mapsto \frac{1}{u}$ est de classe C^1 sur le segment $\left[1, \frac{1}{\varepsilon}\right]$, avec $\varphi(1) = 1$, $\varphi\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = \varepsilon$ et $\varphi'(u) = -\frac{1}{u^2}$. La fonction $g : x \mapsto \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ est continue sur $[\varepsilon, 1]$. Pour $u \geq 1$, $g\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{-\ln u}{u^{-1/2}} = -\sqrt{u} \ln u$. La formule de changement de variable donne :

$$\int_1^\varepsilon g(x) dx = \int_1^{1/\varepsilon} g\left(\frac{1}{u}\right) \left(-\frac{1}{u^2}\right) du = \int_1^{1/\varepsilon} \frac{\ln u}{u^{3/2}} du$$

donc :

$$\int_\varepsilon^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = - \int_1^{1/\varepsilon} \frac{\ln u}{u^{3/2}} du$$

Quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$, $\frac{1}{\varepsilon} \rightarrow +\infty$ et, d'après (a), le membre de droite tend vers $-I$.

Conclusion

l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ converge et vaut $-I$, soit $I = -\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$.

Méthode 2 — Calcul direct par intégration par parties (vérification).

Pour $\varepsilon \in]0, 1[$, les fonctions $x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto 2\sqrt{x}$ sont de classe C^1 sur $[\varepsilon, 1]$, donc :

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = [2\sqrt{x} \ln x]_{\varepsilon}^1 - \int_{\varepsilon}^1 \frac{2\sqrt{x}}{x} dx = -2\sqrt{\varepsilon} \ln \varepsilon - [4\sqrt{x}]_{\varepsilon}^1 = -2\sqrt{\varepsilon} \ln \varepsilon - 4 + 4\sqrt{\varepsilon}$$

Par croissances comparées, $\sqrt{\varepsilon} \ln \varepsilon \rightarrow 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$, d'où $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = -4 = -I$.

Comparaison : la méthode 1 relie les deux intégrales sans les calculer et montre l'intérêt du changement de variable $u = \frac{1}{x}$ pour transformer une intégrale impropre en $+\infty$ en une intégrale impropre en 0 ; la méthode 2 redonne la valeur et fournit la primitive

$G : x \mapsto 2\sqrt{x} \ln x - 4\sqrt{x}$ de $x \mapsto \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, qui servira en 3(c).

3. (a) Code adapté en Python.

Méthode 1 — Produit calculé par une boucle.

Python

```
import numpy as np

def P(n):
    p = 1.0
    for k in range(1, n + 1):
```

```
p = p * (n / k) ** (1 / np.sqrt(k * n))
print(p)
return p
```

La variable p est initialisée à 1 (élément neutre du produit). La boucle parcourt $k = 1, \dots, n$ (la borne supérieure de range est exclue, d'où $n + 1$) et multiplie p par le facteur $\left(\frac{n}{k}\right)^{1/\sqrt{kn}}$. À la sortie de la boucle, p contient P_n , qui est affiché puis renvoyé.

Méthode 2 — Passage au logarithme.

Comme

$$\ln P_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{kn}} \ln \left(\frac{n}{k} \right),$$

on peut calculer cette somme de manière vectorielle puis prendre l'exponentielle.

Python

```
import numpy as np

def P_log(n):
    k = np.arange(1, n + 1)
    S = np.sum(np.log(n / k) / np.sqrt(k * n))
    p = np.exp(S)
    print(p)
    return p
```

Ici $\text{np.arange}(1, n + 1)$ est le tableau des entiers de 1 à n , les opérations sont effectuées coefficient par coefficient, et S contient $\ln P_n$. Cette méthode est plus proche de la question 3(c), où $\ln P_n$ s'interprète comme une somme de Riemann, et elle évite d'accumuler un produit de nombreux facteurs.

(b) Les deux fonctions ont été exécutées et donnent les mêmes valeurs (arrondies au

millième) :

n	P_n
20	8,537
50	13,975
100	18,825

Ces valeurs sont des approximations numériques et ne constituent pas une preuve de la limite.

(c) On reconnaît dans $\ln P_n$ une somme S_n du type étudié au 1.

Pour $n \geq 1$, $P_n > 0$ et :

$$\ln P_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{kn}} \ln \left(\frac{n}{k} \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k/n}} \left(-\ln \frac{k}{n} \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f \left(\frac{k}{n} \right)$$

car $\sqrt{kn} = n\sqrt{\frac{k}{n}}$, où $f :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par $f(x) = -\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Vérifions les hypothèses du 1 :

- f est continue sur $]0, 1]$;
- f est à valeurs positives car $\ln x \leq 0$ pour $x \in]0, 1]$;
- f est dérivable sur $]0, 1]$ et $f'(x) = -\frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{2x\sqrt{x}} = \frac{\ln x - 2}{2x^{3/2}} < 0$ car $\ln x \leq 0$;
donc f est décroissante ;
- d'après 2(b), $\int_0^1 f(x) dx = -\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ converge et vaut $I = 4$.

D'après 1(b), $\ln P_n \rightarrow 4$, et par continuité de l'exponentielle, $P_n = e^{\ln P_n} \rightarrow e^4$.

Conclusion

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = e^4 \approx 54,598.$$

Vitesse de convergence. D'après la Méthode 2 de 2(b), $G : x \mapsto 2\sqrt{x} \ln x - 4\sqrt{x}$ est une primitive de $-f$ sur $]0, 1]$ et $G(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0^+$. Donc, pour $\varepsilon \in]0, 1]$:

$$\int_0^\varepsilon f(x) dx = -G(\varepsilon) = 4\sqrt{\varepsilon} - 2\sqrt{\varepsilon} \ln \varepsilon$$

En particulier,
$$\int_0^{1/n} f(x) dx = \frac{2 \ln n + 4}{\sqrt{n}}.$$

Majoration de l'erreur : avec $f(1) = 0$, la minoration de 1(a)iii donne

$$\ln P_n \geq \int_{1/n}^1 f(x) dx = 4 - \frac{2 \ln n + 4}{\sqrt{n}}.$$

Minoration de l'erreur : en isolant le terme $k = 1$ et en utilisant 1(a)i pour $k \geq 2$:

$$\ln P_n = \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \frac{\ln n}{\sqrt{n}} + \int_{1/n}^1 f(x) dx = 4 - \frac{\ln n + 4}{\sqrt{n}}$$

car
$$\frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot \sqrt{n} \ln n = \frac{\ln n}{\sqrt{n}}.$$

Ainsi, pour tout $n \geq 2$:

$$\frac{\ln n + 4}{\sqrt{n}} \leq 4 - \ln P_n \leq \frac{2 \ln n + 4}{\sqrt{n}}$$

L'écart $4 - \ln P_n$ est donc de l'ordre de $\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$, qui tend très lentement vers 0. Pour $n = 100$, il est supérieur à 0,86, si bien que $P_{100} \leq e^{4-0,86}$ reste très éloigné de e^4 , ce que confirment les valeurs numériques du (b) (et, à titre indicatif, le même programme donne $P_{1000} \approx 35,06$).

Conclusion

la convergence de P_n vers e^4 est très lente.

EXERCICE 2

1. (a) On écrit le système $\phi(A)X = \lambda X$ et on se ramène à un système 2×2 portant sur la matrice $A - \lambda^2 I_2$.

Soit

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}).$$

On a

$$\phi(A)X = \begin{pmatrix} z \\ t \\ ax + cy \\ bx + dy \end{pmatrix},$$

donc :

$$\phi(A)X = \lambda X \iff \begin{cases} z = \lambda x \\ t = \lambda y \\ ax + cy = \lambda z \\ bx + dy = \lambda t \end{cases} \iff \begin{cases} z = \lambda x \\ t = \lambda y \\ (a - \lambda^2)x + cy = 0 \\ bx + (d - \lambda^2)y = 0 \end{cases}$$

en remplaçant z et t dans les deux dernières équations. Les deux dernières équations

s'écrivent $(A - \lambda^2 I_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$. Ainsi :

$$\text{Ker}(\phi(A) - \lambda I_4) = \{(x, y, \lambda x, \lambda y) ; (x, y) \in \text{Ker}(A - \lambda^2 I_2)\}$$

Si $x = y = 0$, alors $z = t = 0$: le vecteur $(x, y, \lambda x, \lambda y)$ est nul si et seulement si (x, y) est nul. Donc λ est valeur propre de $\phi(A)$ si et seulement si $\text{Ker}(A - \lambda^2 I_2) \neq \{0\}$, c'est-à-dire si et seulement si la matrice carrée $A - \lambda^2 I_2$ n'est pas inversible.

D'après le N.B. appliqué à

$$A - \lambda^2 I_2 = \begin{pmatrix} a - \lambda^2 & c \\ b & d - \lambda^2 \end{pmatrix}$$

(avec $\alpha = a - \lambda^2, \gamma = c, \beta = b, \delta = d - \lambda^2$), cette matrice n'est pas inversible si et seulement si $(a - \lambda^2)(d - \lambda^2) - bc = 0$.

Conclusion

λ est valeur propre de $\phi(A)$ si et seulement si $(a - \lambda^2)(d - \lambda^2) - bc = 0$.

Complément utile pour la suite : l'application $\psi : (x, y) \mapsto (x, y, \lambda x, \lambda y)$ est linéaire et injective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^4$, et $\text{Ker}(\phi(A) - \lambda I_4) = \psi(\text{Ker}(A - \lambda^2 I_2))$. Comme une application linéaire injective conserve la dimension :

$$\dim \text{Ker}(\phi(A) - \lambda I_4) = \dim \text{Ker}(A - \lambda^2 I_2)$$

(b) Pour $\mu \in \mathbb{R}$, μ est valeur propre de A si et seulement si $A - \mu I_2$ n'est pas inversible, c'est-à-dire, d'après le N.B., si et seulement si $(a - \mu)(d - \mu) - bc = 0$.

En appliquant cela à $\mu = \lambda^2$ et en utilisant (a) :

Conclusion

λ est valeur propre de $\phi(A) \iff (a - \lambda^2)(d - \lambda^2) - bc = 0 \iff \lambda^2$ est valeur propre de A .

(c) Ici $a = -1, c = 2, b = -3, d = 4$, donc $bc = -6$.

Valeurs propres de A . Pour $\mu \in \mathbb{R}$:

$$(-1 - \mu)(4 - \mu) + 6 = \mu^2 - 3\mu - 4 + 6 = \mu^2 - 3\mu + 2 = (\mu - 1)(\mu - 2)$$

Les valeurs propres de A sont donc 1 et 2.

Valeurs propres de $\phi(A)$. D'après (b), λ est valeur propre de $\phi(A)$ si et seulement si $\lambda^2 \in \{1, 2\}$, c'est-à-dire $\lambda \in \{-\sqrt{2}, -1, 1, \sqrt{2}\}$.

Diagonalisabilité. La matrice $\phi(A) \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ possède quatre valeurs propres réelles distinctes ; elle est donc diagonalisable.

On peut expliciter une base de vecteurs propres grâce à (a). On a $A - I_2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$, de

noyau Vect $((1, 1))$, et $A - 2I_2 = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, de noyau Vect $((2, 3))$. D'où les espaces

propres de $\phi(A)$:

- pour 1 : $\text{Vect}((1, 1, 1, 1))$;
- pour -1 : $\text{Vect}((1, 1, -1, -1))$;
- pour $\sqrt{2}$: $\text{Vect}((2, 3, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}))$;
- pour $-\sqrt{2}$: $\text{Vect}((2, 3, -2\sqrt{2}, -3\sqrt{2}))$.

Conclusion

les valeurs propres de $\phi(A)$ sont $-\sqrt{2}, -1, 1, \sqrt{2}$, et $\phi(A)$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

2. (a) i. Avec $a = 1$ et $b = 0$, le système de 1(a) pour $\lambda \in \{-1, 1\}$ (donc $\lambda^2 = 1$) s'écrit :

$$\begin{cases} z = \lambda x \\ t = \lambda y \\ cy = 0 \\ (d - 1)y = 0 \end{cases}$$

Si $d \neq 1$ ou $c \neq 0$, l'une des deux dernières équations impose $y = 0$, et alors $t = 0$.

Réciproquement, tout vecteur $(x, 0, \lambda x, 0)$ est solution.

Conclusion

$V(1) = \text{Vect}((1, 0, 1, 0))$ et $V(-1) = \text{Vect}((1, 0, -1, 0))$, tous deux de dimension 1 (engendrés par un vecteur non nul).

- ii. Si $d = 1$ et $c = 0$, les deux dernières équations sont toujours vérifiées et

$$V(\lambda) = \{(x, y, \lambda x, \lambda y) ; (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Conclusion

$V(1) = \text{Vect}((1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1))$ et $V(-1) = \text{Vect}((1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, -1))$. Ces familles sont libres (les deux premières coordonnées le montrent), donc $\dim V(1) = \dim V(-1) = 2$.

(b) On détermine le spectre de $\phi(A)$, puis on compare la somme des dimensions des espaces propres à 4 (critère de diagonalisation).

Ici $A = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & d \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure : ses valeurs propres sont ses coefficients

diagonaux 1 et d . D'après 1(b), λ est valeur propre de $\phi(A)$ si et seulement si $\lambda^2 \in \{1, d\}$.

Cas $d = 1$ et $c = 0$. Le spectre de $\phi(A)$ est $\{-1, 1\}$ et, d'après 2(a)ii, $\dim V(1) + \dim V(-1) = 4$: $\phi(A)$ est diagonalisable.

Cas $d = 1$ et $c \neq 0$. Le spectre est $\{-1, 1\}$ et, d'après 2(a)i, $\dim V(1) + \dim V(-1) = 2 < 4$: $\phi(A)$ n'est pas diagonalisable.

Cas $d > 0$ et $d \neq 1$. Les valeurs propres de $\phi(A)$ sont $-1, 1, -\sqrt{d}, \sqrt{d}$, quatre réels distincts car $\sqrt{d} > 0$ et $\sqrt{d} \neq 1$. Une matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ ayant quatre valeurs propres distinctes est diagonalisable.

Cas $d = 0$. Le spectre est $\{-1, 0, 1\}$. D'après 2(a)i (on a $d \neq 1$), $\dim V(1) = \dim V(-1) = 1$. D'après le complément de 1(a), $\dim V(0) = \dim \text{Ker } A$; or

$A = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est non nulle et non inversible, donc de rang 1, et $\dim \text{Ker } A = 1$ par le

théorème du rang. La somme des dimensions vaut $3 < 4$: $\phi(A)$ n'est pas diagonalisable.

Cas $d < 0$. L'équation $\lambda^2 = d$ n'a pas de solution réelle, donc le spectre est $\{-1, 1\}$, et comme $d \neq 1$, $\dim V(1) + \dim V(-1) = 2 < 4$: $\phi(A)$ n'est pas diagonalisable.

Ces cas recouvrent toutes les valeurs possibles de (c, d) .

Conclusion

$\phi(A)$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ si et seulement si $(d = 1 \text{ et } c = 0)$ ou $(d > 0 \text{ et } d \neq 1)$.

(c) D'après l'étude du (b), l'ensemble des valeurs propres de $\phi(A)$ est :

- $\{-1, 1\}$ si $d < 0$ ou $d = 1$;
- $\{-1, 0, 1\}$ si $d = 0$;
- $\{-1, 1, -\sqrt{d}, \sqrt{d}\}$, de cardinal 4, si $d > 0$ et $d \neq 1$.

Donc $\phi(A)$ possède quatre valeurs propres réelles distinctes si et seulement si $d > 0$ et $d \neq 1$, quelle que soit la valeur de c .

- i. Ici d suit la loi uniforme sur les 9 entiers de $\{-5, \dots, 3\}$. Les valeurs favorables sont $d = 2$ et $d = 3$.

Conclusion

la probabilité cherchée vaut $\frac{2}{9}$.

- ii. Ici d suit la loi uniforme sur $[-5, 3]$, de densité $\frac{1}{8}$ sur cet intervalle. L'événement cherché est $(0 < d \leq 3) \setminus (d = 1)$, et $P(d = 1) = 0$ pour une variable à densité. Donc la probabilité vaut $P(0 < d \leq 3) = \frac{3}{8}$.

Conclusion

la probabilité cherchée vaut $\frac{3}{8}$.

- (d) D'après (b), l'événement « $\phi(A)$ est diagonalisable » est la réunion disjointe de $(d = 1 \text{ et } c = 0)$ et de $(d > 0 \text{ et } d \neq 1)$ (disjointe car $d = 1$ dans le premier et $d \neq 1$

dans le second).

Cas 2(c)i. Par indépendance de c et d ,

$$P(d = 1 \text{ et } c = 0) = P(d = 1)P(c = 0) = \frac{1}{9} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{81}.$$

La probabilité cherchée vaut $\frac{2}{9} + \frac{1}{81} = \frac{19}{81}$.

Cas 2(c)ii. $0 \leq P(d = 1 \text{ et } c = 0) \leq P(d = 1) = 0$. La probabilité cherchée vaut $\frac{3}{8}$.

Conclusion

$\frac{19}{81}$ dans le cas des entiers, $\frac{3}{8}$ dans le cas des réels.

PROBLÈME

Modélisation et lemme préliminaire

Le m -ième tournoi est noté T_m . Le joueur A_k ($k \geq 4$) entre en jeu au tournoi T_{k-2} : A_4 au tournoi T_2 , A_5 au tournoi T_3 , etc. Le jeu ne peut s'arrêter qu'à l'issue d'un tournoi T_m avec $m \geq 2$, et tout événement P_m ou S_m contient implicitement le fait que T_m a lieu et que A_1 y participe.

L'énoncé (classements équiprobables, tournois indépendants) se traduit ainsi : pour tout $m \geq 1$ et tout événement H' ne dépendant que des résultats de $T_1, \dots, T_{m-1}$, de probabilité non nulle, sur lequel T_m a lieu et sur lequel les trois participants de T_m et le vainqueur de T_{m-1} (si $m \geq 2$) sont des joueurs fixés, les 6 classements possibles de T_m ont chacun la probabilité conditionnelle $\frac{1}{6}$ sachant H' .

Lemme. Soit $m \geq 2$ et H un événement ne dépendant que des résultats de $T_1, \dots, T_{m-1}$, avec $P(H) > 0$, sur lequel T_m a lieu et A_1 y participe. Alors :

$$(L1) \quad P_H(P_m) = \frac{1}{3};$$

$$(L2) \text{ si de plus } H \subset P_{m-1}, \text{ alors } P_H(S_m) = \frac{1}{3};$$

(L3) si de plus $H \subset S_{m-1}$, alors $P_H(S_m) = \frac{1}{6}$.

De plus, $P(P_1) = P(S_1) = \frac{1}{3}$.

Preuve. Les participants de T_m et le vainqueur de T_{m-1} sont choisis parmi les joueurs $A_1, \dots, A_{m+2}$, en nombre fini. On partitionne donc H en un nombre fini d'événements H' comme dans la modélisation (on écarte ceux de probabilité nulle). Sur chacun d'eux :

- pour (L1), A_1 est premier dans 2 des 6 classements, donc $P_{H'}(P_m) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$;
- pour (L2), le vainqueur de T_{m-1} est A_1 ; si A_1 est second à T_m , le vainqueur de T_m n'est pas A_1 , donc le jeu continue. Ainsi $S_m \cap H'$ est l'événement « A_1 second à T_m », réalisé par 2 classements : $P_{H'}(S_m) = \frac{1}{3}$;
- pour (L3), le vainqueur W de T_{m-1} est un joueur fixé, différent de A_1 , qui participe à T_m (il n'a pas été éliminé) ; soit Z le troisième participant. Sur H' , S_m est réalisé si et seulement si A_1 est second et le vainqueur de T_m n'est pas W , c'est-à-dire pour le seul classement (Z premier, A_1 second, W dernier) : $P_{H'}(S_m) = \frac{1}{6}$.

La formule des probabilités totales sur le système complet formé par les H' (relativement à H) donne le résultat, car la probabilité conditionnelle est la même sur chaque H' . Enfin, T_1 ne peut pas arrêter le jeu, donc S_1 est l'événement « A_1 second à T_1 », et $P(P_1) = P(S_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Première partie

A)

1. On a $G_2 = P_1 \cap P_2$. Sur P_1 , T_2 a lieu et A_1 y participe, et $P(P_1) = \frac{1}{3} > 0$. Par la formule des probabilités composées et (L1) :

$$P(G_2) = P(P_1) P_{P_1}(P_2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

L'événement $(X = 2)$ est la réunion des trois événements « A_i est premier à T_1 et à T_2 »

pour $i \in \{1, 2, 3\}$, deux à deux disjoints (un seul joueur est premier à T_1). Les joueurs A_1, A_2, A_3 jouant des rôles symétriques, le calcul précédent donne $\frac{1}{9}$ pour chacun.

Méthode alternative : sachant le vainqueur de T_1 (qui participe à T_2), la probabilité qu'il soit premier à T_2 vaut $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ d'après la modélisation, puis on conclut par la formule des probabilités totales sur le système complet « A_i est premier à T_1 », $i \in \{1, 2, 3\}$.

Conclusion

$$P(G_2) = \frac{1}{9} \text{ et } P(X = 2) = \frac{1}{3}.$$

2. (a) L'événement J_k signifie que le tournoi T_{k-2} a lieu ; il ne dépend que des résultats de $T_1, \dots, T_{k-3}$, et $J_{k+1} \subset J_k$.

J_4 est l'événement certain, car T_2 a toujours lieu. L'événement J_5 (« T_3 a lieu ») est le contraire de $(X = 2)$. Donc $P(J_5) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Soit $i \geq 4$ tel que $P(J_i) > 0$. Sur J_i , le tournoi T_{i-2} a lieu ($i - 2 \geq 2$) et le vainqueur W de T_{i-3} y participe. Le tournoi T_{i-1} a lieu si et seulement si W n'est pas premier à T_{i-2} . En partitionnant J_i selon l'identité de W et des participants de T_{i-2} , chaque élément H' de la partition vérifie $P_{H'}(W \text{ premier à } T_{i-2}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, d'où, par la formule des probabilités totales :

$$P_{J_i}(J_{i+1}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Conclusion

$P(J_5) = \frac{2}{3}$ et, pour tout $i \geq 4$, $P_{J_i}(J_{i+1}) = \frac{2}{3}$ (la positivité de $P(J_i)$ est établie au (b)).

(b) Montrons par récurrence sur $k \geq 4$ que $P(J_k) = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-4}$.

Initialisation : $P(J_4) = 1 = \left(\frac{2}{3}\right)^0$.

Hérédité : supposons $P(J_k) = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-4}$ pour un $k \geq 4$. Alors $P(J_k) > 0$, et comme $J_{k+1} \subset J_k$, on a, d'après (a) :

$$P(J_{k+1}) = P(J_k \cap J_{k+1}) = P(J_k) P_{J_k}(J_{k+1}) = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-4} \times \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-3}$$

Conclusion

pour tout $k \geq 4$, $P(J_k) = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-4}$.

3. (a) On convient que X prend la valeur $+\infty$ sur l'événement où le jeu ne s'arrête jamais ; on vérifie en (c) que cet événement est négligeable.

Pour $n \geq 2$, l'événement $(X \geq n)$ signifie qu'au moins n tournois sont disputés, c'est-à-dire que le tournoi T_n a lieu, c'est-à-dire que le joueur A_{n+2} joue.

Conclusion

pour tout $n \geq 2$, $(X \geq n) = J_{n+2}$.

(b) Pour $n \geq 2$, $(X \geq n+1) \subset (X \geq n)$ et $(X = n) = (X \geq n) \setminus (X \geq n+1)$. Donc :

$$P(X = n) = P(J_{n+2}) - P(J_{n+3}) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \left(1 - \frac{2}{3}\right)$$

Conclusion

$$\text{pour tout } n \geq 2, \quad P(X = n) = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}.$$

(c) La série géométrique de raison $\frac{2}{3} \in]-1, 1[$ converge, et :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} P(X = n) = \frac{1}{3} \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^j = \frac{1}{3} \times \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1$$

Conclusion

$$\sum_{n=2}^{+\infty} P(X = n) = 1.$$

En particulier, l'événement « le jeu ne s'arrête jamais » est négligeable : presque sûrement, le jeu s'arrête et X est à valeurs dans $\{2, 3, 4, \dots\}$.

4. Pour tout $m \geq 1$, $P(X - 1 = m) = P(X = m + 1) = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{m-1}$, et $X - 1$ prend presque sûrement ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Donc $X - 1$ suit la loi géométrique de paramètre $p = \frac{1}{3}$.

Une variable de loi géométrique de paramètre p admet une espérance $\frac{1}{p}$ et une variance $\frac{1-p}{p^2}$. Ici $E(X - 1) = 3$ et $V(X - 1) = \frac{2/3}{1/9} = 6$. Par linéarité de l'espérance et invariance de la variance par translation, $X = (X - 1) + 1$ admet une espérance et une variance, avec $E(X) = E(X - 1) + 1 = 4$ et $V(X) = V(X - 1) = 6$.

Conclusion

$$X - 1 \text{ suit la loi géométrique } \mathcal{G}\left(\frac{1}{3}\right), E(X) = 4 \text{ et } V(X) = 6.$$

B)

1. Expression de G_3 . Supposons G_3 réalisé. A_1 joue T_3 , donc il n'a été dernier ni à T_1 ni à T_2 . Il est premier à T_2 et à T_3 . Le jeu ne s'étant pas arrêté à T_2 , A_1 n'était pas premier à T_1 : il était second à T_1 , et le jeu continue toujours après T_1 . Donc $G_3 \subset S_1 \cap P_2 \cap P_3$.

Réciproquement, sur $S_1 \cap P_2 \cap P_3$, le vainqueur de T_1 n'est pas A_1 , donc le jeu continue après T_2 (gagné par A_1), puis A_1 gagne T_2 et T_3 : il est gagnant au troisième tournoi.

Expression de G_4 . Supposons G_4 réalisé. A_1 joue $T_1, \dots, T_4$, n'est dernier à aucun des trois premiers tournois, et est premier à T_3 et T_4 . Il n'est pas premier à T_2 (sinon il gagnerait au troisième tournoi), donc il est second à T_2 , et le jeu continue après T_2 puisque T_3 a lieu : S_2 est réalisé. À T_1 , il est premier ou second.

Réciproquement, sur $(P_1 \cup S_1) \cap S_2 \cap P_3 \cap P_4$, le jeu continue après T_2 (définition de S_2), puis après T_3 (gagné par A_1 , qui n'avait pas gagné T_2), et A_1 gagne T_3 et T_4 .

Conclusion

$$G_3 = S_1 \cap P_2 \cap P_3$$

$$G_4 = (P_1 \cap S_2 \cap P_3 \cap P_4) \cup (S_1 \cap S_2 \cap P_3 \cap P_4)$$

et cette dernière réunion est disjointe car $P_1 \cap S_1 = \emptyset$.

2. (a) On applique la formule des probabilités composées et le lemme.

- $P(S_1) = \frac{1}{3}$;
- sur S_1 , T_2 a lieu et A_1 y participe, donc $P_{S_1}(P_2) = \frac{1}{3}$ par (L1);
- sur $S_1 \cap P_2$ (de probabilité $\frac{1}{9} > 0$), le jeu continue après T_2 (le vainqueur de T_2 est

A_1 , qui n'a pas gagné T_1), donc T_3 a lieu avec A_1 , et $P_{S_1 \cap P_2}(P_3) = \frac{1}{3}$ par (L1).

Donc :

$$P(G_3) = P(S_1) P_{S_1}(P_2) P_{S_1 \cap P_2}(P_3) = \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

Conclusion

$$P(G_3) = \frac{1}{27}.$$

(b) Sur S_1 , T_2 a lieu avec A_1 : par (L3) avec $m = 2$ et $H = S_1$, $P_{S_1}(S_2) = \frac{1}{6}$.
Concrètement, sachant S_1 , le vainqueur W de T_1 , A_1 et A_4 disputent T_2 , et le seul classement favorable est (A_4, A_1, W) .

Sur P_1 , T_2 a lieu avec A_1 : par (L2), $P_{P_1}(S_2) = \frac{1}{3}$ (les deux classements où A_1 est second conviennent, car le jeu continue nécessairement).

Calcul de $P(G_4)$. Sur $P_1 \cap S_2$ et sur $S_1 \cap S_2$, le jeu continue après T_2 et A_1 joue T_3 : P_3 a la probabilité conditionnelle $\frac{1}{3}$ par (L1). Sur $P_1 \cap S_2 \cap P_3$ et $S_1 \cap S_2 \cap P_3$, le jeu continue après T_3 (A_1 gagne T_3 sans avoir gagné T_2) et A_1 joue T_4 : P_4 a la probabilité conditionnelle $\frac{1}{3}$. Tous les événements conditionnants sont de probabilité non nulle (produits de facteurs non nuls). Par additivité et probabilités composées :

$$P(G_4) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{81} + \frac{1}{162} = \frac{3}{162}$$

Conclusion

$$P_{S_1}(S_2) = \frac{1}{6}, \quad P_{P_1}(S_2) = \frac{1}{3} \text{ et } P(G_4) = \frac{1}{54}.$$

3. (a) Notons $r_m \in \{1, 2, 3\}$ le rang de A_1 au tournoi T_m .

Supposons G_7 réalisé. A_1 joue les tournois T_1 à T_7 , donc $r_m \in \{1, 2\}$ pour $m \leq 6$. On a $r_6 = r_7 = 1$. On a $r_5 = 2$, sinon A_1 gagnerait au sixième tournoi. Enfin, $(r_1, \dots, r_5)$ ne

contient pas deux 1 consécutifs, sinon A_1 aurait gagné avant. Donc

$(r_1, \dots, r_7) = (r_1, r_2, r_3, r_4, 2, 1, 1)$ où $(r_1, r_2, r_3, r_4) \in \{1, 2\}^4$ ne contient pas deux 1 consécutifs.

Dénombrons ces quadruplets selon le nombre de 1 :

- aucun 1 : $(2, 2, 2, 2)$;
- un seul 1 : $(1, 2, 2, 2), (2, 1, 2, 2), (2, 2, 1, 2), (2, 2, 2, 1)$;
- deux 1 non consécutifs (positions $\{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}$) : $(1, 2, 1, 2), (1, 2, 2, 1), (2, 1, 2, 1)$;
- trois 1 ou plus : impossible sur 4 positions sans deux 1 consécutifs.

Il y a donc huit suites possibles :

suite	$(r_1, \dots, r_7)$
1	$(2, 2, 2, 2, 2, 1, 1)$
2	$(1, 2, 2, 2, 2, 1, 1)$
3	$(2, 1, 2, 2, 2, 1, 1)$
4	$(2, 2, 1, 2, 2, 1, 1)$
5	$(2, 2, 2, 1, 2, 1, 1)$
6	$(1, 2, 1, 2, 2, 1, 1)$
7	$(1, 2, 2, 1, 2, 1, 1)$
8	$(2, 1, 2, 1, 2, 1, 1)$

Plus précisément, notons $Q_m^1 = P_m$ et $Q_m^2 = S_m$. Alors G_7 est la réunion disjointe, sur les huit suites r ci-dessus, des événements $E_r = Q_1^{r_1} \cap \dots \cap Q_5^{r_5} \cap P_6 \cap P_7$.

En effet, si G_7 est réalisé, le jeu continue après chacun des tournois $T_1, \dots, T_6$, donc

$r_m = 2$ entraîne S_m . Réciproquement, sur E_r , le jeu continue après chaque T_m ($m \leq 6$) : si $r_m = 2$, par définition de S_m ; si $r_m = 1$, parce que $m = 1$ ou $r_{m-1} = 2$, si bien que le vainqueur de T_m , à savoir A_1 , n'a pas gagné T_{m-1} . Comme A_1 gagne T_6 et T_7 , il est gagnant au septième tournoi. Les E_r sont deux à deux disjoints car $P_m \cap S_m = \emptyset$.

Conclusion

il y a exactement huit suites de classements de A_1 favorables à G_7 , données dans le tableau.

(b) On calcule $P(E_r)$ pour chaque suite par la formule des probabilités composées. Sur l'événement $Q_1^{r_1} \cap \dots \cap Q_{m-1}^{r_{m-1}}$ (avec, le cas échéant, P_6), le tournoi T_m a lieu et A_1 y participe, d'après le raisonnement précédent. Le lemme donne le facteur associé au tournoi T_m :

- $\frac{1}{3}$ si $m = 1$;
- $\frac{1}{3}$ si $r_m = 1$ (L1) ;
- $\frac{1}{3}$ si $r_m = 2$ et $r_{m-1} = 1$ (L2) ;
- $\frac{1}{6}$ si $r_m = 2$ et $r_{m-1} = 2$ (L3).

Les événements conditionnants sont de probabilité non nulle, puisque ce sont des produits de facteurs non nuls. Si k désigne le nombre de fois où un 2 est suivi d'un 2 dans la suite, on obtient $P(E_r) = \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{7-k}$.

suite	k	$P(E_r)$
1	4	$\frac{1}{34992}$
2	3	$\frac{2}{34992}$
3	2	$\frac{4}{34992}$

suite	k	$P(E_r)$
4	2	$\frac{4}{34992}$
5	2	$\frac{4}{34992}$
6	1	$\frac{8}{34992}$
7	1	$\frac{8}{34992}$
8	0	$\frac{16}{34992}$

En effet, $\left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{7-k} = \frac{1}{3^7} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{2^{4-k}}{34992}$, avec $3^7 \times 2^4 = 2187 \times 16 = 34992$.

Par additivité :

$$P(G_7) = \frac{1 + 2 + 3 \times 4 + 2 \times 8 + 16}{34992}$$

Conclusion

$$P(G_7) = \frac{47}{34992}.$$

Deuxième partie

Rectification de l'énoncé : le PDF indique $(1, 2, 2, 2) \in \mathcal{U}_4^3$ et $(2, 2, 1, 2, 2) \in \mathcal{U}_5^3$. Or chacune de ces listes contient exactement deux fois un «2» suivi d'un autre «2» (positions (2, 3) et (3, 4) pour la première, (1, 2) et (4, 5) pour la seconde). Les exemples rectifiés sont $(1, 2, 2, 2) \in \mathcal{U}_4^2$ et $(2, 2, 1, 2, 2) \in \mathcal{U}_5^2$.

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une n -liste possède $n - 1$ couples de termes consécutifs.

$\mathcal{U}_n^0$: une liste de $\mathcal{U}_n^0$ ne contient ni deux 1 consécutifs ni deux 2 consécutifs ; ses termes consécutifs sont donc distincts, et elle alterne entre 1 et 2. Comme elle finit par 2, elle est entièrement déterminée : son i -ème terme vaut 2 si $n - i$ est pair et 1 sinon.

Réciproquement, cette liste vérifie a), b) et c) avec $k = 0$. Ainsi $\mathcal{U}_n^0 = \{(\dots, 2, 1, 2, 1, 2)\}$ (liste alternée de longueur n finissant par 2).

$\mathcal{U}_n^n$: une n -liste n'a que $n - 1$ couples consécutifs, donc au plus $n - 1$ couples « 2 suivi de 2 ». Ainsi $\mathcal{U}_n^n = \emptyset$.

$\mathcal{U}_{n+1}^n$: une $(n + 1)$ -liste a n couples consécutifs ; ils doivent tous être égaux à $(2, 2)$, donc tous les termes valent 2. Réciproquement, la liste $(2, 2, \dots, 2)$ de longueur $n + 1$ convient. Ainsi $\mathcal{U}_{n+1}^n = \{(2, 2, \dots, 2)\}$.

$\mathcal{U}_{n+2}^n$: une liste w de $\mathcal{U}_{n+2}^n$ a $n + 1$ couples consécutifs, dont exactement un n'est pas $(2, 2)$. Elle contient au moins un 1 (sinon les $n + 1$ couples seraient $(2, 2)$). Si un 1 est en position i , alors $i \leq n + 1$ (la liste finit par 2) et le couple $(1, 2)$ en positions $(i, i + 1)$ n'est pas $(2, 2)$; si de plus $i \geq 2$, le couple en positions $(i - 1, i)$ vaut $(2, 1)$ (pas de 1 consécutifs), ce qui ferait deux couples différents de $(2, 2)$. Donc le seul 1 possible est en position 1, et $w = (1, 2, 2, \dots, 2)$. Réciproquement, cette liste a exactement n couples $(2, 2)$, finit par 2 et ne contient pas deux 1 consécutifs. Ainsi $\mathcal{U}_{n+2}^n = \{(1, 2, \dots, 2)\}$.

Conclusion

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n^0 = 1$, $u_n^n = 0$, $u_{n+1}^n = 1$, $u_{n+2}^n = 1$.

(b) Question adaptée au programme actuel : l'énoncé original demandait la relation pour $k \geq 1$, mais u_{n-2}^k n'est défini que pour $k \leq n - 2$; la relation est donc demandée pour $k \in \{1, \dots, n - 2\}$, ce qui suffit pour la suite.

Soit $n \geq 3$ et $k \in \{1, \dots, n - 2\}$. Notons $w = (x_1, \dots, x_n)$ une liste de $\mathcal{U}_n^k$; on a $x_n = 2$. On partage $\mathcal{U}_n^k$ en $\mathcal{A} = \{w ; x_{n-1} = 1\}$ et $\mathcal{B} = \{w ; x_{n-1} = 2\}$.

Listes de $\mathcal{A}$. Si $x_{n-1} = 1$, alors $x_{n-2} = 2$ (pas de 1 consécutifs, et $n - 2 \geq 1$). La liste tronquée $(x_1, \dots, x_{n-2})$ finit par 2, ne contient pas deux 1 consécutifs, et contient exactement k couples $(2, 2)$, puisque les couples supprimés $(x_{n-2}, x_{n-1}) = (2, 1)$ et $(x_{n-1}, x_n) = (1, 2)$ ne sont pas des couples $(2, 2)$. Elle appartient donc à $\mathcal{U}_{n-2}^k$.

Réciproquement, si $w' \in \mathcal{U}_{n-2}^k$, la liste $(w', 1, 2)$ appartient à $\mathcal{A}$: w' finit par 2, donc l'ajout de 1, 2 ne crée ni couple $(1, 1)$ ni couple $(2, 2)$. Les applications «supprimer les deux derniers termes» et «ajouter 1, 2» sont réciproques l'une de l'autre, donc $\text{Card } \mathcal{A} = u_{n-2}^k$ (qui est bien défini car $k \leq n - 2$).

Listes de $\mathcal{B}$. Si $x_{n-1} = 2$, le dernier couple est $(2, 2)$. La liste tronquée $(x_1, \dots, x_{n-1})$ finit par 2, ne contient pas deux 1 consécutifs et contient exactement $k - 1$ couples $(2, 2)$: elle appartient à $\mathcal{U}_{n-1}^{k-1}$ ($k - 1 \geq 0$). Réciproquement, ajouter un 2 à une liste de $\mathcal{U}_{n-1}^{k-1}$ (qui

fini par 2) crée exactement un couple (2, 2) supplémentaire et aucun couple (1, 1). Donc $\text{Card } \mathcal{B} = u_{n-1}^{k-1}$.

Conclusion

pour $n \geq 3$ et $k \in \{1, \dots, n-2\}$, $u_n^k = u_{n-2}^k + u_{n-1}^{k-1}$.

(c) Rectification de l'énoncé : le PDF définit $\gamma_i^j = u_{2i+1-j}^i$, ce qui est incompatible avec la relation demandée en i et avec le résultat de iii; la définition correcte, symétrique de celle de δ_i^j , est $\gamma_i^j = u_{2i+1-j}^j$.

i. Valeurs aux bords. Pour $i \in \mathbb{N}$, $\gamma_i^0 = u_{2i+1}^0 = 1$ d'après (a), car $2i+1 \in \mathbb{N}^*$. Pour $i \geq 1$, $\gamma_i^i = u_{i+1}^i = 1$ d'après (a); pour $i = 0$, $\gamma_0^0 = u_1^0 = 1$. Donc $\gamma_i^0 = \gamma_i^i = 1$.

Relation de récurrence. Soit $i \geq 2$ et $j \in \{1, \dots, i-1\}$. Posons $n = 2i+1-j$ et $k = j$. On a $n \geq 2i+1-(i-1) = i+2 \geq 4$, $k \geq 1$, et $n-2 = 2i-1-j \geq j$ car $2j \leq 2i-2$. La relation de (b) s'applique :

$$u_{2i+1-j}^j = u_{2i-1-j}^j + u_{2i-j}^{j-1}$$

Or $\gamma_{i-1}^j = u_{2(i-1)+1-j}^j = u_{2i-1-j}^j$ et $\gamma_{i-1}^{j-1} = u_{2(i-1)+1-(j-1)}^{j-1} = u_{2i-j}^{j-1}$, avec j et $j-1$ dans $\{0, \dots, i-1\}$. D'où :

$$\gamma_{i-1}^{j-1} + \gamma_{i-1}^j = \gamma_i^j$$

Valeur de γ_i^j . Montrons par récurrence sur i la propriété : pour tout $j \in \{0, \dots, i\}$, $\gamma_i^j = \binom{i}{j}$. Pour $i = 0$ et $i = 1$, seules les valeurs aux bords interviennent, et elles valent $1 = \binom{i}{0} = \binom{i}{i}$. Si la propriété est vraie au rang $i-1$ avec $i \geq 2$, alors les bords donnent $\gamma_i^0 = \binom{i}{0}$ et $\gamma_i^i = \binom{i}{i}$, et pour $j \in \{1, \dots, i-1\}$, la formule du triangle de Pascal donne :

$$\gamma_i^j = \binom{i-1}{j-1} + \binom{i-1}{j} = \binom{i}{j}$$

Conclusion

pour tout $i \in \mathbb{N}$ et tout $j \in \{0, \dots, i\}$, $\gamma_i^j = \binom{i}{j}$.

ii. Valeurs aux bords. $\delta_i^0 = u_{2i+2}^0 = 1$; pour $i \geq 1$, $\delta_i^i = u_{i+2}^i = 1$ d'après (a); pour $i = 0$, $\delta_0^0 = u_2^0 = 1$.

Relation. Soit $i \geq 2$ et $j \in \{1, \dots, i-1\}$. Avec $n = 2i + 2 - j \geq i + 3 \geq 3$, $k = j \geq 1$ et $n - 2 = 2i - j \geq j$, la relation (b) donne :

$$u_{2i+2-j}^j = u_{2i-j}^j + u_{2i+1-j}^{j-1}$$

Or $\delta_{i-1}^j = u_{2(i-1)+2-j}^j = u_{2i-j}^j$ et $\delta_{i-1}^{j-1} = u_{2(i-1)+2-(j-1)}^{j-1} = u_{2i+1-j}^{j-1}$. Donc $\delta_{i-1}^{j-1} + \delta_{i-1}^j = \delta_i^j$.

La même récurrence qu'au i (mêmes valeurs aux bords, même relation de Pascal) donne :

Conclusion

pour tout $i \in \mathbb{N}$ et tout $j \in \{0, \dots, i\}$, $\delta_i^j = \binom{i}{j}$.

iii. Soit $(k, p) \in \mathbb{N}^2$. Posons $i = k + p$ et $j = k \in \{0, \dots, i\}$. Alors $2i + 1 - j = k + 2p + 1$ et $2i + 2 - j = k + 2p + 2$, donc :

$$u_{k+2p+1}^k = \gamma_{k+p}^k = \binom{k+p}{k} \quad \text{et} \quad u_{k+2p+2}^k = \delta_{k+p}^k = \binom{k+p}{k}$$

Conclusion

comme $\binom{k+p}{k} = \binom{k+p}{p}$, on a $u_{k+2p+1}^k = u_{k+2p+2}^k = \binom{k+p}{p}$.

2. (a) Comme $x < 1$, on a $1 - u \geq 1 - x > 0$ pour $u \in [0, x]$, donc f est de classe C^∞ sur $[0, x]$. Montrons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ que, pour tout $u \in [0, x]$:

$$f^{(p)}(u) = \frac{(k+p)!}{k!} (1-u)^{-(k+p+1)}$$

Pour $p = 0$, c'est la définition de f . Si la formule est vraie au rang p , la dérivée de $u \mapsto (1-u)^{-(k+p+1)}$ est $u \mapsto (k+p+1)(1-u)^{-(k+p+2)}$, donc

$$f^{(p+1)}(u) = \frac{(k+p)! (k+p+1)}{k!} (1-u)^{-(k+p+2)} = \frac{(k+p+1)!}{k!} (1-u)^{-(k+p+2)}.$$

Conclusion

pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $u \in [0, x]$, $f^{(p)}(u) = \frac{(k+p)!}{k! (1-u)^{k+p+1}}.$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f est de classe C^n sur $[0, x]$. L'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre $n-1$ entre 0 et x donne :

$$\left| f(x) - \sum_{p=0}^{n-1} \frac{f^{(p)}(0)}{p!} x^p \right| \leq M_n \frac{x^n}{n!}, \quad \text{où } M_n = \max_{u \in [0, x]} |f^{(n)}(u)|$$

D'après (a), $\frac{f^{(p)}(0)}{p!} = \frac{(k+p)!}{k! p!} = \binom{k+p}{k}$. De plus, $u \mapsto 1-u$ est décroissante et positive sur $[0, x]$, donc $f^{(n)}$ est positive et croissante, et

$$M_n = f^{(n)}(x) = \frac{(k+n)!}{k! (1-x)^{k+n+1}}. \text{ Par conséquent :}$$

$$M_n \frac{x^n}{n!} = \frac{(k+n)!}{k! n!} \cdot \frac{x^n}{(1-x)^{k+n+1}} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}} \binom{k+n}{k} \left(\frac{x}{1-x} \right)^n$$

Conclusion

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| \frac{1}{(1-x)^{k+1}} - \sum_{p=0}^{n-1} \binom{k+p}{k} x^p \right| \leq \frac{1}{(1-x)^{k+1}} \binom{k+n}{k} \left(\frac{x}{1-x} \right)^n.$$

(c) Il suffit de montrer que le majorant de (b) tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$.

Posons $q = \frac{x}{1-x}$. Comme $0 < x < \frac{1}{2}$, on a $0 < x < 1-x$, donc $0 < q < 1$. Par ailleurs :

$$\binom{k+n}{k} = \frac{(n+1)(n+2) \cdots (n+k)}{k!} \leq (n+k)^k$$

d'où $0 \leq \binom{k+n}{k} q^n \leq q^{-k} (n+k)^k q^{n+k}$. Par croissances comparées, $m^k q^m \rightarrow 0$ quand $m \rightarrow +\infty$ (car $0 < q < 1$), donc $(n+k)^k q^{n+k} \rightarrow 0$. Par encadrement, le majorant de (b) tend vers 0, et les sommes partielles

$$\sum_{p=0}^{n-1} \binom{k+p}{k} x^p$$

convergent vers $\frac{1}{(1-x)^{k+1}}$.

Conclusion

la série converge et

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \binom{k+p}{k} x^p = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}.$$

(d) D'après 1(c)iii, $u_{k+2p+1}^k = u_{k+2p+2}^k = \binom{k+p}{p} = \binom{k+p}{k}$. Donc :

$$u_{k+2p+1}^k \left(\frac{1}{3}\right)^{k+2p+3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{k+3} \binom{k+p}{k} \left(\frac{1}{9}\right)^p$$

Comme $\frac{1}{9} \in]0, \frac{1}{2}[$, la question (c) montre que la série

$$\sum_p \binom{k+p}{k} \left(\frac{1}{9}\right)^p$$

converge et a pour somme $\left(\frac{9}{8}\right)^{k+1}$. Par linéarité :

$$\alpha_k = \left(\frac{1}{3}\right)^{k+3} \left(\frac{9}{8}\right)^{k+1} = \frac{3^{2k+2}}{3^{k+3} 8^{k+1}} = \frac{3^{k-1}}{8^{k+1}} = \frac{1}{9} \left(\frac{3}{8}\right)^{k+1}$$

De même, chaque terme de α'_k vaut $\frac{1}{3}$ fois le terme correspondant de α_k , donc la série converge et $\alpha'_k = \frac{1}{3}\alpha_k$.

Conclusion

$$\alpha_k = \frac{1}{9} \left(\frac{3}{8}\right)^{k+1} \text{ et } \alpha'_k = \frac{1}{27} \left(\frac{3}{8}\right)^{k+1}.$$

3. (a) On généralise le raisonnement de la première partie, B)3.

Soit $n \geq 2$. Notons $\mathcal{W}_{n-2}$ l'ensemble des $(n-2)$ -listes de $\{1, 2\}$ finissant par 2 et sans deux 1 consécutifs, si $n \geq 3$, c'est-à-dire la réunion disjointe des $\mathcal{U}_{n-2}^k$ pour $k \in \{0, \dots, n-2\}$ (le nombre de couples $(2, 2)$ d'une telle liste est compris entre 0 et $n-3$); pour $n=2$, $\mathcal{W}_0$ ne contient que la liste vide, ce qui est cohérent avec la convention $u_0^0 = 1$.

Pour $w = (r_1, \dots, r_{n-2}) \in \mathcal{W}_{n-2}$, posons, avec $Q_m^1 = P_m$ et $Q_m^2 = S_m$:

$$E_w = Q_1^{r_1} \cap \dots \cap Q_{n-2}^{r_{n-2}} \cap P_{n-1} \cap P_n$$

Décomposition de G_n . Si G_n est réalisé, A_1 joue $T_1, \dots, T_n$, donc ses rangs $r_1, \dots, r_{n-1}$ sont dans $\{1, 2\}$; $r_{n-1} = r_n = 1$; si $n \geq 3$, $r_{n-2} = 2$ (sinon A_1 gagnerait au tournoi $n-1$) et $(r_1, \dots, r_{n-2})$ n'a pas deux 1 consécutifs (sinon A_1 aurait gagné plus tôt); enfin, le jeu continue après chaque T_m pour $m \leq n-1$, donc $r_m = 2$ entraîne S_m . Ainsi G_n est inclus dans la réunion des E_w .

Réciproquement, sur E_w , le jeu continue après chaque T_m ($m \leq n-1$): si $r_m = 2$, par définition de S_m ; si $r_m = 1$ avec $m \leq n-1$, parce que $m = 1$ ou $r_{m-1} = 2$ (absence de 1 consécutifs, et $r_{n-2} = 2$), donc A_1 , vainqueur de T_m , n'a pas gagné T_{m-1} . Comme A_1 gagne T_{n-1} et T_n , G_n est réalisé. Les E_w sont deux à deux disjoints car $P_m \cap S_m = \emptyset$.

Donc G_n est la réunion disjointe des E_w pour $w \in \mathcal{W}_{n-2}$.

Probabilité de E_w . Par la formule des probabilités composées, en conditionnant par les événements successifs $Q_1^{r_1} \cap \dots \cap Q_{m-1}^{r_{m-1}}$ (sur lesquels T_m a lieu avec A_1 , d'après ce qui précède), le lemme préliminaire donne n facteurs :

- le facteur vaut $\frac{1}{6}$ exactement pour les indices $m \in \{2, \dots, n-2\}$ tels que $r_{m-1} = r_m = 2$ (L3);
- tous les autres facteurs valent $\frac{1}{3}$: premier tournoi, rang 1 (L1), rang 2 précédé d'un rang 1 (L2), et les deux derniers tournois (L1).

Les événements conditionnants sont de probabilité non nulle (produits de facteurs non nuls). Si $w \in \mathcal{U}_{n-2}^k$, le nombre de facteurs égaux à $\frac{1}{6}$ est k , donc :

$$P(E_w) = \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}$$

Par additivité, en regroupant les listes selon la valeur de k :

Conclusion

pour tout $n \geq 2$,

$$P(G_n) = \sum_{k=0}^{n-2} u_{n-2}^k \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}.$$

Vérification : on retrouve $P(G_2) = \frac{1}{9}$, $P(G_3) = \frac{1}{27}$, $P(G_4) = \frac{1}{81} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{27} = \frac{1}{54}$ et, avec $(u_5^0, u_5^1, u_5^2, u_5^3, u_5^4) = (1, 2, 3, 1, 1)$, $P(G_7) = \frac{47}{34992}$.

(b) Question adaptée au programme actuel : la « permutation de

$\sum$

» admise par l'énoncé original est remplacée par l'énoncé précis du résultat admis d'interversion des sommes pour des réels positifs.

Les événements G_n ($n \geq 2$) sont deux à deux disjoints (le jeu s'arrête au plus une fois), et l'événement « A_1 gagne » est leur réunion. Par σ -additivité, la série

$$\sum P(G_n)$$

converge et :

$$p_1 = \sum_{n=2}^{+\infty} P(G_n)$$

Pour $n \geq 2$ et $k \in \{0, \dots, n-2\}$, posons $a_{n,k} = u_{n-2}^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^n \geq 0$. Comme

$$\left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^n,$$

la question (a) donne

$$P(G_n) = \sum_{k=0}^{n-2} a_{n,k}.$$

Les hypothèses du résultat admis sont satisfaites : les $a_{n,k}$ sont positifs et la série

$$\sum_n \left(\sum_k a_{n,k} \right)$$

converge. Donc, pour tout k , la série

$$\sum_{n \geq k+2} a_{n,k} = \left(\frac{1}{2} \right)^k \sum_{n \geq k+2} u_{n-2}^k \left(\frac{1}{3} \right)^n$$

converge, ce qui montre que β_k est bien défini, et :

$$p_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=k+2}^{+\infty} a_{n,k} \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^k \beta_k$$

Conclusion

$$p_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^k \beta_k$$

avec

$$\beta_k = \sum_{n=k+2}^{+\infty} u_{n-2}^k \left(\frac{1}{3} \right)^n.$$

Remarque : le résultat admis se démontre avec des sommes finies. Notons A la somme

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-2} a_{n,k} \right).$$

Pour $N \geq K + 2$, l'échange de deux sommes finies donne

$$\sum_{k=0}^K \sum_{n=k+2}^N a_{n,k} \leq \sum_{n=2}^N \sum_{k=0}^{n-2} a_{n,k} \leq A.$$

Pour K fixé, chaque série

$$\sum_n a_{n,k}$$

est à termes positifs et de sommes partielles majorées par A , donc converge ; notons R_k sa somme. En faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient

$$\sum_{k=0}^K R_k \leq A$$

pour tout K , donc la série

$$\sum_k R_k$$

converge et

$$\sum_k R_k \leq A.$$

Inversement,

$$\sum_{n=2}^N \sum_{k=0}^{n-2} a_{n,k} = \sum_{k=0}^{N-2} \sum_{n=k+2}^N a_{n,k} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} R_k,$$

d'où

$$A \leq \sum_k R_k$$

en faisant tendre N vers $+\infty$.

(c) Méthode 1 — Calcul direct.

D'après 1(a) et la convention $u_0^0 = 1$, on a $u_m^0 = 1$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Donc β_0 est la somme d'une série géométrique de raison $\frac{1}{3}$:

$$\beta_0 = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{(1/3)^2}{1 - 1/3} = \frac{1}{9} \times \frac{3}{2} = \frac{1}{6}$$

Méthode 2 — Décomposition selon la parité, comme en (d).

En posant $m = n - 2$,

$$\beta_0 = \sum_{m \geq 0} u_m^0 \left(\frac{1}{3}\right)^{m+2}.$$

Le terme $m = 0$ vaut $\frac{1}{9}$; les termes d'indice impair $m = 2p + 1$ ont pour somme α_0 et ceux d'indice pair $m = 2p + 2 \geq 2$ ont pour somme α'_0 (le découpage est justifié comme au (d)). D'où :

$$\beta_0 = \frac{1}{9} + \alpha_0 + \alpha'_0 = \frac{1}{9} + \frac{1}{24} + \frac{1}{72} = \frac{8+3+1}{72} = \frac{1}{6}$$

La méthode 1 est la plus rapide ; la méthode 2 montre pourquoi β_0 ne suit pas la formule générale du (d) : le terme $u_0^0 = 1$ (convention) s'ajoute, alors que $u_k^k = 0$ pour $k \geq 1$.

Conclusion

$$\beta_0 = \frac{1}{6}.$$

(d) Soit $k \geq 1$. En posant $m = n - 2$:

$$\beta_k = \sum_{m=k}^{+\infty} u_m^k \left(\frac{1}{3}\right)^{m+2}$$

Le terme $m = k$ est nul car $u_k^k = 0$ (question 1(a), $k \in \mathbb{N}^*$). Les entiers $m \geq k + 1$ s'écrivent de façon unique $m = k + 2p + 1$ ou $m = k + 2p + 2$ avec $p \in \mathbb{N}$. Pour $N \in \mathbb{N}$, la somme partielle jusqu'à $m = k + 2N + 2$ s'écrit :

$$\sum_{m=k}^{k+2N+2} u_m^k \left(\frac{1}{3}\right)^{m+2} = \sum_{p=0}^N u_{k+2p+1}^k \left(\frac{1}{3}\right)^{k+2p+3} + \sum_{p=0}^N u_{k+2p+2}^k \left(\frac{1}{3}\right)^{k+2p+4}$$

Quand $N \rightarrow +\infty$, ce membre de droite tend vers $\alpha_k + \alpha'_k$ d'après 2(d). La série définissant β_k converge (question (b)), donc sa somme est la limite de cette sous-suite de sommes partielles.

$$\beta_k = \alpha_k + \alpha'_k = \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{27}\right) \left(\frac{3}{8}\right)^{k+1}$$

Conclusion

$$\text{pour tout } k \geq 1, \quad \beta_k = \frac{4}{27} \left(\frac{3}{8} \right)^{k+1}.$$

(e) D'après (b), (c) et (d) :

$$p_1 = \beta_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^k \frac{4}{27} \left(\frac{3}{8} \right)^{k+1} = \frac{1}{6} + \frac{4}{27} \cdot \frac{3}{8} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{16} \right)^k$$

La série géométrique de raison $\frac{3}{16} \in]-1, 1[$ converge et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{16} \right)^k = \frac{3/16}{1 - 3/16} = \frac{3}{13}.$$

De plus $\frac{4}{27} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{18}$. Donc :

$$p_1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{18} \cdot \frac{3}{13} = \frac{1}{6} + \frac{1}{78} = \frac{13+1}{78} = \frac{14}{78}$$

Conclusion

la probabilité que le joueur A_1 gagne le jeu vaut $p_1 = \frac{7}{39} \approx 0,179$.

Relevé des adaptations

- Exercice 1, question 2(b) : le changement de variable non affine $u = \frac{1}{x}$ est indiqué dans l'énoncé, conformément au programme (changements de variable non affines à préciser). Question adaptée au programme actuel.
- Exercice 1, question 3(a) : la demande d'«algorithme» est remplacée par l'écriture d'une fonction Python. Code adapté en Python.

- Exercice 2 et Problème : notations modernisées sans changement de contenu ($\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ devient $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; $P(B/A)$ devient $P_A(B)$; C_n^p devient $\binom{n}{p}$; les intervalles d'entiers sont notés $\{a, \dots, b\}$).
- Problème, deuxième partie, exemples : rectification d'erreurs du PDF. Celui-ci indique $(1, 2, 2, 2) \in \mathcal{U}_4^3$ et $(2, 2, 1, 2, 2) \in \mathcal{U}_5^3$, alors que ces listes contiennent chacune exactement deux couples «2 suivi de 2»; les exemples sont rectifiés en $(1, 2, 2, 2) \in \mathcal{U}_4^2$ et $(2, 2, 1, 2, 2) \in \mathcal{U}_5^2$.
- Problème, deuxième partie, question 1(b) : l'hypothèse « $k \geq 1$ » est remplacée par « $k \in \{1, \dots, n-2\}$ », car u_{n-2}^k n'est défini par l'énoncé que pour $k \leq n-2$. Cette restriction suffit pour toutes les utilisations de la relation en 1(c).
- Problème, deuxième partie, question 1(c) : le PDF définit $\gamma_i^j = u_{2i+1-j}^i$; cette définition est incompatible avec la relation demandée et avec le résultat de 1(c)iii. Elle est rectifiée en $\gamma_i^j = u_{2i+1-j}^j$, cohérente avec $\delta_i^j = u_{2i+2-j}^j$.
- Problème, deuxième partie, question 3(b) : la «permutation de

$$\sum$$

» admise par l'énoncé est remplacée par l'énoncé précis du résultat admis (intersion de sommes pour une famille de réels positifs), conformément au programme qui exclut la théorie des familles sommables. Question adaptée au programme actuel. Le corrigé indique en remarque une démonstration élémentaire de ce résultat.