



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

Ecricome

Mathématiques

1992

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Corrigé

Exercice 1

Notation utilisée dans tout l'exercice : pour $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, on note F la primitive de f sur $\mathbb{R}$ nulle en a , c'est-à-dire $F(x) = \int_a^x f(t) dt$. D'après le théorème fondamental du calcul intégral (f continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$), F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $F' = f$. Par la relation de Chasles, pour tout $x \neq a$:

$$g(x) = \phi(f)(x) = \frac{F(2x - a) - F(x)}{x - a}.$$

1 - a. Il faut montrer deux choses : pour tout $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, la fonction $g = \phi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$ (donc ϕ est à valeurs dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$) ; et ϕ est linéaire.

Continuité de g sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$. Sur l'ouvert $\mathbb{R} \setminus \{a\}$, $x \mapsto F(2x - a)$ est continue (composée de fonctions continues), $x \mapsto F(x)$ aussi, et $x \mapsto x - a$ est continue et ne s'annule pas : par quotient, g est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$.

Continuité de g en a . Il s'agit de montrer que $g(x) \rightarrow f(a)$ quand $x \rightarrow a$, $x \neq a$.

Méthode 1 — Taux d'accroissement de F .

Pour $x \neq a$, on a aussi $2x - a \neq a$, et l'on peut écrire, puisque $F(a) = 0$:

$$g(x) = \frac{F(2x - a) - F(a)}{x - a} - \frac{F(x) - F(a)}{x - a} = 2 \cdot \frac{F(2x - a) - F(a)}{(2x - a) - a} - \frac{F(x) - F(a)}{x - a}.$$

Comme F est dérivable en a de dérivée $F'(a) = f(a)$, la fonction $\tau : y \mapsto \frac{F(y) - F(a)}{y - a}$ tend vers $f(a)$ quand $y \rightarrow a$, $y \neq a$. Lorsque $x \rightarrow a$ avec $x \neq a$, on a $2x - a \rightarrow a$ avec $2x - a \neq a$; par composition des limites, $\tau(2x - a) \rightarrow f(a)$. Donc $g(x) \rightarrow 2f(a) - f(a) = f(a) = g(a)$.

Méthode 2 — Majoration directe à l'aide de la continuité de f .

Pour $x \neq a$, $\int_x^{2x-a} f(a) dt = (2x - a - x)f(a) = (x - a)f(a)$, donc

$$g(x) - f(a) = \frac{1}{x - a} \int_x^{2x-a} (f(t) - f(a)) dt.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité de f en a , il existe $\eta > 0$ tel que $|t - a| \leq \eta \Rightarrow |f(t) - f(a)| \leq \varepsilon$.

Soit x tel que $0 < |x - a| \leq \frac{\eta}{2}$. Tout t compris entre x et $2x - a$ vérifie

$|t - a| \leq \max(|x - a|, |2x - a - a|) = 2|x - a| \leq \eta$. Par l'inégalité triangulaire intégrale (les bornes x et $2x - a$ étant éventuellement dans l'ordre décroissant, on intègre sur le segment qu'elles délimitent, de longueur $|x - a|$) :

$$|g(x) - f(a)| \leq \frac{1}{|x - a|} \cdot |x - a| \cdot \varepsilon = \varepsilon.$$

Donc $g(x) \rightarrow f(a)$ quand $x \rightarrow a$.

La méthode 1 exploite la dérivabilité de la primitive (elle sera réutilisée en 1.b) ; la méthode 2 n'utilise que la continuité de f et l'encadrement d'une intégrale, ce qui la rend utile lorsque l'on ne dispose pas de primitive explicite.

Linéarité. Soient $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ et $\mu \in \mathbb{R}$. Pour $x \neq a$, par linéarité de l'intégrale,

$$\phi(\mu f_1 + f_2)(x) = \frac{1}{x - a} \int_x^{2x-a} (\mu f_1 + f_2)(t) dt = \mu \phi(f_1)(x) + \phi(f_2)(x),$$

et en a :

$$\phi(\mu f_1 + f_2)(a) = \mu f_1(a) + f_2(a) = \mu \phi(f_1)(a) + \phi(f_2)(a).$$

Conclusion

ϕ est une application linéaire de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ dans lui-même, c'est-à-dire un endomorphisme de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.

1 - b. Sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$, $g(x) = \frac{F(2x-a) - F(x)}{x-a}$ où F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Le numérateur est dérivable sur $\mathbb{R}$ (composée et différence de fonctions dérivables), de dérivée $x \mapsto 2F'(2x-a) - F'(x) = 2f(2x-a) - f(x)$; le dénominateur est dérivable et ne s'annule pas sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$. Par quotient, g est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ et, pour $x \neq a$:

$$g'(x) = \frac{(2f(2x-a) - f(x))(x-a) - (F(2x-a) - F(x))}{(x-a)^2}.$$

En reconnaissant $g(x)$ dans le second terme, on obtient la forme plus compacte :

$$\forall x \neq a, \quad g'(x) = \frac{2f(2x-a) - f(x) - g(x)}{x-a}.$$

De plus, g' est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ comme combinaison de fonctions continues : g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$.

1 - c. On calcule explicitement g pour $f : t \mapsto |t-a|$, en distinguant le signe de $x-a$.

Cas $x > a$: alors $a < x < 2x-a$, et sur $[x, 2x-a]$ on a $|t-a| = t-a$. Donc

$$\int_x^{2x-a} (t-a) dt = \left[\frac{(t-a)^2}{2} \right]_x^{2x-a} = \frac{4(x-a)^2 - (x-a)^2}{2} = \frac{3}{2}(x-a)^2,$$

et $g(x) = \frac{3}{2}(x-a)$.

Cas $x < a$: alors $2x-a < x < a$, et sur $[2x-a, x]$ on a $|t-a| = a-t$. Donc

$$\begin{aligned} \int_x^{2x-a} (a-t) dt &= - \int_{2x-a}^x (a-t) dt = - \left[-\frac{(a-t)^2}{2} \right]_{2x-a}^x \\ &= - \left(-\frac{(a-x)^2}{2} + \frac{4(a-x)^2}{2} \right) = -\frac{3}{2}(a-x)^2, \end{aligned}$$

et

$$g(x) = \frac{-\frac{3}{2}(a-x)^2}{x-a} = \frac{3}{2}(a-x).$$

Enfin $g(a) = f(a) = 0$. Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{3}{2}|x-a|$.

Taux d'accroissement en a : pour $x \neq a$, $\frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \frac{3}{2} \cdot \frac{|x-a|}{x-a}$, qui vaut $\frac{3}{2}$ si $x > a$ et $-\frac{3}{2}$ si $x < a$. Les dérivées à droite et à gauche en a existent mais sont différentes.

Conclusion

g n'est pas dérivable en a .

1 - d. D'après 1.b, toute fonction de l'image de ϕ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$. Il suffit donc d'exhiber une fonction continue non dérivable en un point $b \neq a$.

Posons $b = a + 1$ et $h : x \mapsto |x - b|$. La fonction h est continue sur $\mathbb{R}$, donc $h \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, mais elle n'est pas dérivable en b (son taux d'accroissement en b vaut 1 à droite et -1 à gauche). Si l'on avait $h = \phi(f)$ pour un $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, h serait dérivable en $b \neq a$ d'après 1.b : contradiction.

Conclusion

$h \notin \text{Im}(\phi)$, donc ϕ n'est pas surjectif.

2 - a. Énoncé introductif : $u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ vérifie $\forall x \in \mathbb{R}, u(x) = 2u(2x - a)$. Les deux sous-questions suivantes en tirent que $u = 0$.

2 - a. i. On procède par récurrence sur n , à x fixé. Posons $x_n = \frac{(2^n - 1)a + x}{2^n}$ et montrons $\mathcal{P}(n) : u(x_n) = 2^n u(x)$.

Relation préliminaire : pour tout $y \in \mathbb{R}$, appliquons l'hypothèse au réel $\frac{y+a}{2}$; comme $2 \cdot \frac{y+a}{2} - a = y$, il vient $u\left(\frac{y+a}{2}\right) = 2u(y)$.

Initialisation : $x_0 = x$ et $u(x_0) = u(x) = 2^0 u(x)$.

Hérédité : supposons $\mathcal{P}(n)$. On a

$$\frac{x_n + a}{2} = \frac{(2^n - 1)a + x + 2^n a}{2^{n+1}} = \frac{(2^{n+1} - 1)a + x}{2^{n+1}} = x_{n+1}.$$

Par la relation préliminaire appliquée à $y = x_n$,

$$u(x_{n+1}) = 2u(x_n) = 2 \cdot 2^n u(x) = 2^{n+1} u(x).$$

Conclusion

$$\forall n \in \mathbb{N}, u\left(\frac{(2^n - 1)a + x}{2^n}\right) = 2^n u(x).$$

2 - a. ii. Fixons $x \in \mathbb{R}$. On a $x_n = a + \frac{x-a}{2^n}$, donc $x_n \rightarrow a$ quand $n \rightarrow +\infty$. La fonction u étant continue en a , $u(x_n) \rightarrow u(a)$: la suite $(2^n u(x))_n$ est donc convergente, en particulier bornée.

Raisonnons par l'absurde : si $u(x) \neq 0$, alors $|2^n u(x)| = 2^n |u(x)| \rightarrow +\infty$, ce qui contredit le caractère borné. Donc $u(x) = 0$.

Conclusion

u est l'application nulle.

2 - b. On montre que $\text{Ker}(\phi) = \{0\}$.

Soit $f \in \text{Ker}(\phi)$. Alors $f(a) = \phi(f)(a) = 0$ et, pour tout $x \neq a$, $\int_x^{2x-a} f(t) dt = 0$, c'est-à-dire $F(2x-a) - F(x) = 0$. Cette égalité est encore vraie pour $x = a$ (les deux

termes valent $F(a)$). La fonction $x \mapsto F(2x - a) - F(x)$ est donc nulle sur $\mathbb{R}$; elle est dérivable et sa dérivée est nulle :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2f(2x - a) - f(x) = 0, \quad \text{soit} \quad f(x) = 2f(2x - a).$$

La fonction f , continue, vérifie l'hypothèse de 2.a, donc $f = 0$. Réciproquement $\phi(0) = 0$.

Conclusion

$\text{Ker}(\phi) = \{0\}$; ϕ est injectif.

3 - a. Soit $k \in \{0, \dots, n\}$. Pour $x \neq a$:

$$\begin{aligned} \int_x^{2x-a} (t-a)^k dt &= \left[\frac{(t-a)^{k+1}}{k+1} \right]_x^{2x-a} = \frac{(2(x-a))^{k+1} - (x-a)^{k+1}}{k+1} \\ &= \frac{2^{k+1} - 1}{k+1} (x-a)^{k+1}, \end{aligned}$$

donc $\phi(d_k)(x) = \frac{2^{k+1} - 1}{k+1} (x-a)^k.$

En a : $\phi(d_k)(a) = d_k(a)$, qui vaut 1 si $k = 0$ et 0 si $k \geq 1$; la formule précédente donne la même valeur en $x = a$ (pour $k = 0$, $\frac{2-1}{1} = 1$).

Conclusion

en posant $\lambda_k = \frac{2^{k+1} - 1}{k+1}$, on a $\phi(d_k) = \lambda_k d_k$ pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$.

3 - b. Étape 1 : $(d_0, \dots, d_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Chaque d_k est une fonction polynomiale de degré exactement k ; une famille de $n+1$ polynômes de degrés échelonnés $0, 1, \dots, n$ est libre, et $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$, donc c'est une base. (On peut aussi invoquer la formule de Taylor pour les polynômes en a .)

Étape 2 : ϕ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Pour

$$P = \sum_{k=0}^n p_k d_k \in \mathbb{R}_n[X],$$

par linéarité et 3.a,

$$\phi(P) = \sum_{k=0}^n p_k \lambda_k d_k \in \mathbb{R}_n[X].$$

Donc $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par ϕ et ϕ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Étape 3 : diagonalisabilité. La matrice de ϕ_n dans la base $(d_0, \dots, d_n)$ est $\text{diag}(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$: il existe une base de vecteurs propres, donc ϕ_n est diagonalisable.

Étape 4 : bijectivité.

Méthode 1 — Par la matrice diagonale. Pour tout k , $2^{k+1} \geq 2 > 1$, donc $\lambda_k > 0$. Une matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux sont non nuls est inversible ; donc ϕ_n est bijectif.

Méthode 2 — Par le noyau. D'après 2.b, $\text{Ker}(\phi_n) \subset \text{Ker}(\phi) = \{0\}$, donc ϕ_n est injectif. C'est un endomorphisme d'un espace de dimension finie : par le théorème du rang, il est bijectif.

La méthode 1 est directe ici car les valeurs propres sont explicites ; la méthode 2 montre l'intérêt de la question 2 et s'appliquerait même sans calcul des λ_k .

Conclusion

ϕ_n est un automorphisme diagonalisable de $\mathbb{R}_n[X]$, de valeurs propres $\lambda_k = \frac{2^{k+1} - 1}{k + 1}$, $0 \leq k \leq n$.

4 - a. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x = (x - a) + a$; la formule du binôme donne

$$x^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} (x - a)^k.$$

Conclusion

$$c_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} d_k.$$

4 - b. Étape 1 : traduction de la condition. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$. Montrons que f vérifie la condition (E) : $\forall x \in \mathbb{R}, \int_x^{2x-a} f(t) dt = (x - a)x^n$, si et seulement si $\phi(f) = c_n$.

Si (E) est vérifiée, alors pour $x \neq a$, en divisant par $x - a \neq 0$, $\phi(f)(x) = x^n$. Les fonctions $\phi(f)$ et c_n sont continues sur $\mathbb{R}$ et coïncident sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$; par passage à la limite en a , elles coïncident aussi en a . Donc $\phi(f) = c_n$.

Réciproquement, si $\phi(f) = c_n$, alors pour $x \neq a$,

$\int_x^{2x-a} f = (x - a)\phi(f)(x) = (x - a)x^n$, et pour $x = a$ les deux membres sont nuls. Donc (E) est vérifiée.

Étape 2 : unicité. ϕ est injectif (2.b), donc l'équation $\phi(f) = c_n$ admet au plus une solution.

Étape 3 : existence. Posons

$$f_0 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} \frac{1}{\lambda_k} d_k$$

(licite car $\lambda_k > 0$). C'est une fonction polynomiale, donc continue, et par linéarité et 3.a :

$$\phi(f_0) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} \frac{1}{\lambda_k} \lambda_k d_k = c_n.$$

Conclusion

il existe une unique fonction f de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ vérifiant la condition, à savoir

$$f : x \mapsto \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{k+1}{2^{k+1}-1} a^{n-k} (x-a)^k.$$

Vérification sur un cas simple : pour $n = 0$, on obtient $f = 1$, et effectivement

$$\int_x^{2x-a} 1 dt = x - a = (x-a)x^0.$$

Exercice 2

1 - Fixons $n \in \mathbb{N}$. La famille (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'événements (le signal est en exactement un des trois points après le n -ième déplacement).

Par la formule des probabilités totales,

$$P(A_{n+1}) = P(A_{n+1} \cap A_n) + P(A_{n+1} \cap B_n) + P(A_{n+1} \cap C_n).$$

Pour chaque terme, si $P(B_n) > 0$, $P(A_{n+1} \cap B_n) = P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) = aP(B_n)$; si $P(B_n) = 0$, on a $P(A_{n+1} \cap B_n) \leq P(B_n) = 0$, et l'égalité $P(A_{n+1} \cap B_n) = aP(B_n)$ reste vraie. Même raisonnement pour les autres termes. Le signal ne reste jamais sur place, donc $P_{A_n}(A_{n+1}) = 0$. On obtient :

$$P(A_{n+1}) = a P(B_n) + a P(C_n),$$

$$P(B_{n+1}) = a P(A_n) + (1-a) P(C_n),$$

$$P(C_{n+1}) = (1-a)P(A_n) + (1-a)P(B_n).$$

Conclusion

ces trois égalités s'écrivent matriciellement $X_{n+1} = MX_n$ avec $M =$

$$\begin{pmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & 1-a \\ 1-a & 1-a & 0 \end{pmatrix}.$$

2 - a. On a

$$N = {}^tM = \begin{pmatrix} 0 & a & 1-a \\ a & 0 & 1-a \\ a & 1-a & 0 \end{pmatrix}.$$

Chaque ligne de N a pour somme $a + (1-a) = 1$. Donc, en notant $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Nu = u$,

avec $u \neq 0$.

Conclusion

u est un vecteur propre de N associé à la valeur propre 1.

2 - b. On cherche les réels λ pour lesquels le système $NX = \lambda X$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, admet une

solution non nulle (sans déterminant ni polynôme caractéristique).

Méthode 1 — Résolution directe du système.

$$NX = \lambda X \iff \begin{cases} ay + (1-a)z = \lambda x & (L_1) \\ ax + (1-a)z = \lambda y & (L_2) \\ ax + (1-a)y = \lambda z & (L_3) \end{cases}$$

$(L_1) - (L_2)$ donne $a(y-x) = \lambda(x-y)$, soit $(\lambda+a)(x-y) = 0$.

$(L_2) - (L_3)$ donne $(1-a)(z-y) = \lambda(y-z)$, soit $(\lambda+1-a)(y-z) = 0$.

Notons que $-a \in]-1, 0[$ et $a-1 \in]-1, 0[$, donc $1 \notin \{-a, a-1\}$; de plus $-a = a-1 \iff a = \frac{1}{2}$.

Cas 1 : $\lambda \notin \{-a, a-1\}$. Alors $x = y = z$, et (L_1) devient $x = \lambda x$. Si $\lambda \neq 1$, $x = 0$ et $X = 0$: λ n'est pas valeur propre. Si $\lambda = 1$, le système équivaut à $x = y = z$, donc $E_1(N) = \text{Vect}(u)$.

Cas 2 : $\lambda = -a$ avec $a \neq \frac{1}{2}$. Alors $\lambda + 1 - a = 1 - 2a \neq 0$, donc $y = z$. (L_2) devient $ax + (1-a)y = -ay$, soit $y = -ax$; (L_1) devient $y = -ax$; (L_3) coïncide avec (L_2) puisque $y = z$. Donc $E_{-a}(N) = \text{Vect}((1, -a, -a))$, de dimension 1.

Cas 3 : $\lambda = a-1$ avec $a \neq \frac{1}{2}$. Alors $\lambda + a = 2a-1 \neq 0$, donc $x = y$. (L_1) devient $ax + (1-a)z = (a-1)x$, soit $(1-a)z = (a-1)x - ax = -x$, d'où $x = (a-1)z$. (L_2) donne la même relation, et (L_3) s'écrit $ax + (1-a)x = (a-1)z$, soit encore $x = (a-1)z$. Donc $E_{a-1}(N) = \text{Vect}((a-1, a-1, 1))$, de dimension 1.

Cas 4 : $a = \frac{1}{2}$ et $\lambda = -\frac{1}{2}$. Les deux relations obtenues sont alors automatiquement vérifiées, et chacune des trois équations équivaut à $x + y + z = 0$ (par exemple (L_1) : $\frac{y+z}{2} = -\frac{x}{2}$). Donc

$$E_{-1/2}(N) = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\} = \text{Vect}((1, -1, 0), (1, 0, -1)),$$

de dimension 2 (les deux vecteurs ne sont pas colinéaires).

Méthode 2 — Vérification de vecteurs propres puis argument de dimension.

On vérifie directement :

$$N \begin{pmatrix} 1 \\ -a \\ -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a^2 - a(1-a) \\ a - a(1-a) \\ a - a(1-a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ a^2 \\ a^2 \end{pmatrix} = -a \begin{pmatrix} 1 \\ -a \\ -a \end{pmatrix}$$

et

$$N \begin{pmatrix} a-1 \\ a-1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(a-1) + 1 - a \\ a(a-1) + 1 - a \\ a(a-1) + (1-a)(a-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a-1)^2 \\ (a-1)^2 \\ a-1 \end{pmatrix} = (a-1) \begin{pmatrix} a-1 \\ a-1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si $a \neq \frac{1}{2}$, on dispose de trois valeurs propres distinctes $1, -a, a-1$. Les espaces propres sont en somme directe dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ de dimension 3 : chacun est de dimension au moins 1, donc il ne peut y avoir d'autre valeur propre et chacun est de dimension exactement 1. On retrouve les droites de la méthode 1.

Si $a = \frac{1}{2}$, les deux vecteurs ci-dessus sont associés à $-\frac{1}{2}$ et ne sont pas colinéaires, donc $\dim E_{-1/2}(N) \geq 2$; avec $\dim E_1(N) \geq 1$ et la somme directe, on obtient $\dim E_{-1/2}(N) = 2$, $\dim E_1(N) = 1$ et aucune autre valeur propre.

La méthode 1 est la plus sûre lorsqu'on ne connaît pas les vecteurs propres ; la méthode 2, plus rapide, suppose qu'on les ait devinés (ici, ce sont les colonnes de la matrice P de la question 3) et repose sur la somme directe des espaces propres.

Conclusion

les autres valeurs propres de N sont $-a$ et $a - 1$.

Si $a \neq \frac{1}{2}$: $E_{-a}(N) = \text{Vect}((1, -a, -a))$ et $E_{a-1}(N) = \text{Vect}((a-1, a-1, 1))$.

Si $a = \frac{1}{2}$: la seule autre valeur propre est $-\frac{1}{2}$ et $E_{-1/2}(N)$ est le plan d'équation $x + y + z = 0$.

Dans tous les cas, $E_1(N) = \text{Vect}(u)$.

2 - c. Si $a \neq \frac{1}{2}$, $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ possède trois valeurs propres distinctes : elle est diagonalisable. Si $a = \frac{1}{2}$, la somme des dimensions des espaces propres vaut $1 + 2 = 3$: elle est diagonalisable.

Conclusion

N est diagonalisable pour tout $a \in]0, 1[$.

3 - On résout, pour $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ quelconque, le système $PX = Y$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

$$\begin{cases} x + y + (a-1)z = y_1 & (L_1) \\ x - ay + (a-1)z = y_2 & (L_2) \\ x - ay + z = y_3 & (L_3) \end{cases}$$

$$(L_1) - (L_2) : (1+a)y = y_1 - y_2, \text{ d'où, comme } 1+a \neq 0, \quad y = \frac{y_1 - y_2}{1+a}.$$

$$(L_3) - (L_2) : (2-a)z = y_3 - y_2, \text{ d'où, comme } 2-a \neq 0, \quad z = \frac{y_3 - y_2}{2-a}.$$

$$(L_3) : \quad x = y_3 + ay - z = y_3 + \frac{a(y_1 - y_2)}{1+a} - \frac{y_3 - y_2}{2-a}.$$

Regroupons selon y_1, y_2, y_3 dans l'expression de x : le coefficient de y_1 est $\frac{a}{1+a}$; celui de y_2 est

$$-\frac{a}{1+a} + \frac{1}{2-a} = \frac{-a(2-a) + 1+a}{(1+a)(2-a)} = \frac{a^2 - a + 1}{(1+a)(2-a)};$$

celui de y_3 est $1 - \frac{1}{2-a} = \frac{1-a}{2-a}.$

Pour tout Y , le système admet une unique solution : P est inversible, et la solution s'écrit $X = P^{-1}Y$.

Conclusion

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a}{1+a} & \frac{a^2 - a + 1}{(1+a)(2-a)} & \frac{1-a}{2-a} \\ \frac{1}{1+a} & -\frac{1}{1+a} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2-a} & \frac{1}{2-a} \end{pmatrix}.$$

Vérification de la première ligne de $P^{-1}P$: premier coefficient

$$\begin{aligned} \frac{a}{1+a} + \frac{a^2 - a + 1}{(1+a)(2-a)} + \frac{1-a}{2-a} &= \frac{a(2-a) + a^2 - a + 1 + (1-a)(1+a)}{(1+a)(2-a)} \\ &= \frac{2+a-a^2}{(1+a)(2-a)} = 1, \end{aligned}$$

puisque $(1+a)(2-a) = 2+a-a^2$.

Pour $a = \frac{1}{4}$ (valeur fixée pour la suite) : $1+a = \frac{5}{4}$, $2-a = \frac{7}{4}$, $a^2 - a + 1 = \frac{13}{16}$,
d'où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{3}{4} \\ 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 1 & -\frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{13}{35} & \frac{3}{7} \\ \frac{4}{5} & -\frac{4}{5} & 0 \\ 0 & -\frac{4}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}.$$

4 - a. Les colonnes de P sont, dans l'ordre, u , $(1, -a, -a)$ et $(a-1, a-1, 1)$, vecteurs propres de N associés à 1 , $-a$ et $a-1$ (question 2). Donc $NP = PD$ avec $D = \text{diag}(1, -a, a-1)$, et, P étant inversible, $N = PDP^{-1}$. Pour $a = \frac{1}{4}$:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Récurrence : $N^0 = I_3 = PD^0P^{-1}$; si $N^n = PD^nP^{-1}$, alors $N^{n+1} = N^nN = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$.

Conclusion

$$\forall n \in \mathbb{N}, N^n = PD^nP^{-1} \text{ avec } D^n = \text{diag} \left(1, \left(-\frac{1}{4} \right)^n, \left(-\frac{3}{4} \right)^n \right).$$

4 - b. Notons $\alpha_n = \left(-\frac{1}{4} \right)^n$ et $\beta_n = \left(-\frac{3}{4} \right)^n$. On a

$$PD^n = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_n & -\frac{3}{4}\beta_n \\ 1 & -\frac{1}{4}\alpha_n & -\frac{3}{4}\beta_n \\ 1 & -\frac{1}{4}\alpha_n & \beta_n \end{pmatrix}.$$

En multipliant à droite par P^{-1} : le coefficient (i, j) de N^n vaut

$$(PD^n)_{i1}(P^{-1})_{1j} + (PD^n)_{i2}(P^{-1})_{2j} + (PD^n)_{i3}(P^{-1})_{3j}.$$

Par exemple, le coefficient $(1, 2)$ vaut

$$\frac{13}{35} + \alpha_n \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) + \left(-\frac{3}{4}\beta_n\right) \left(-\frac{4}{7}\right) = \frac{13}{35} - \frac{4}{5}\alpha_n + \frac{3}{7}\beta_n.$$

On obtient de même tous les coefficients :

$$N^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} + \frac{4}{5}\alpha_n & \frac{13}{35} - \frac{4}{5}\alpha_n + \frac{3}{7}\beta_n & \frac{3}{7} - \frac{3}{7}\beta_n \\ \frac{1}{5} - \frac{1}{5}\alpha_n & \frac{13}{35} + \frac{1}{5}\alpha_n + \frac{3}{7}\beta_n & \frac{3}{7} - \frac{3}{7}\beta_n \\ \frac{1}{5} - \frac{1}{5}\alpha_n & \frac{13}{35} + \frac{1}{5}\alpha_n - \frac{4}{7}\beta_n & \frac{3}{7} + \frac{4}{7}\beta_n \end{pmatrix}.$$

Contrôles : pour $n = 0$ ($\alpha_0 = \beta_0 = 1$) on retrouve I_3 ; pour $n = 1$ ($\alpha_1 = -\frac{1}{4}$, $\beta_1 = -\frac{3}{4}$) on retrouve N (par exemple coefficient $(1, 1)$: $\frac{1}{5} - \frac{1}{5} = 0$; coefficient $(1, 2)$: $\frac{13}{35} + \frac{1}{5} - \frac{9}{28} = \frac{52 + 28 - 45}{140} = \frac{1}{4}$); chaque ligne a pour somme 1, conformément à $N^n u = u$.

4 - c. Par compatibilité de la transposition avec le produit, $({}^t N)^n = {}^t(N^n)$, et ${}^t N = M$.

Donc $M^n = {}^t(N^n)$:

$$M^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} + \frac{4}{5}\alpha_n & \frac{1}{5} - \frac{1}{5}\alpha_n & \frac{1}{5} - \frac{1}{5}\alpha_n \\ \frac{13}{35} - \frac{4}{5}\alpha_n + \frac{3}{7}\beta_n & \frac{13}{35} + \frac{1}{5}\alpha_n + \frac{3}{7}\beta_n & \frac{13}{35} + \frac{1}{5}\alpha_n - \frac{4}{7}\beta_n \\ \frac{3}{7} - \frac{3}{7}\beta_n & \frac{3}{7} - \frac{3}{7}\beta_n & \frac{3}{7} + \frac{4}{7}\beta_n \end{pmatrix},$$

avec $\alpha_n = \left(-\frac{1}{4}\right)^n$ et $\beta_n = \left(-\frac{3}{4}\right)^n$.

5 - a. Par récurrence immédiate à partir de 1, $X_n = M^n X_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ici

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ donc } X_n \text{ est la première colonne de } M^n.$$

Conclusion

pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P(A_n) = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \left(-\frac{1}{4}\right)^n,$$

$$P(B_n) = \frac{13}{35} - \frac{4}{5} \left(-\frac{1}{4}\right)^n + \frac{3}{7} \left(-\frac{3}{4}\right)^n,$$

$$P(C_n) = \frac{3}{7} - \frac{3}{7} \left(-\frac{3}{4}\right)^n.$$

Contrôles : pour $n = 0$, on obtient $(1, 0, 0)$; pour $n = 1$, $(0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4})$, conforme à l'énoncé ($a = \frac{1}{4}$); la somme vaut $\frac{7 + 13 + 15}{35} = 1$.

5 - b. Comme $\left|-\frac{1}{4}\right| < 1$ et $\left|-\frac{3}{4}\right| < 1$, les suites géométriques $\left(\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right)$ et $\left(\left(-\frac{3}{4}\right)^n\right)$ tendent vers 0.

Conclusion

$\lim P(A_n) = \frac{1}{5}$, $\lim P(B_n) = \frac{13}{35}$, $\lim P(C_n) = \frac{3}{7}$. On remarque que $L = \left(\frac{1}{5}, \frac{13}{35}, \frac{3}{7}\right)$ vérifie $ML = L$ (c'est la première ligne de P^{-1} , transposée) : c'est la répartition stationnaire du signal, indépendante ici de la position initiale puisque toutes les colonnes de M^n convergent vers L .

Problème

Remarques préalables. Les prix α_i sont des réels strictement positifs. Toutes les variables aléatoires considérées (A, X_i, S) sont finies, donc admettent une espérance et une variance. Les probabilités conditionnelles sachant $(A = k)$ sont définies lorsque $P(A = k) > 0$, ce qui est le cas pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$ sous (H') comme sous (H'') (voir II.A : $\lambda > 0$).

Partie I

A - 1. Sachant $(A = k)$, le client choisit uniformément une partie à k éléments parmi les n articles : il y a $\binom{n}{k}$ choix équiprobables. Ceux qui contiennent l'article a_i sont obtenus en choisissant les $k - 1$ autres articles parmi les $n - 1$ restants : il y en a $\binom{n-1}{k-1}$ (avec la convention $\binom{n-1}{-1} = 0$ pour $k = 0$).

$$P((X_i = 1)/(A = k)) = \frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{k!(n-k)!}{n!} = \frac{k}{n} \quad (k \geq 1).$$

Conclusion

pour $0 \leq k \leq n$, $P((X_i = 1)/(A = k)) = \frac{k}{n}$ (formule valable aussi pour $k = 0$, où la probabilité est nulle).

A - 2. De même, les parties à k éléments contenant a_i et a_j ($i \neq j$) sont au nombre de $\binom{n-2}{k-2}$ pour $k \geq 2$, et il n'y en a aucune pour $k \leq 1$. Pour $k \geq 2$ (et $n \geq 2$) :

$$\frac{\binom{n-2}{k-2}}{\binom{n}{k}} = \frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} \cdot \frac{k!(n-k)!}{n!} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}.$$

Conclusion

pour $0 \leq k \leq n$, $P(((X_i = 1) \cap (X_j = 1))/(A = k)) = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$ (nul pour $k \in \{0, 1\}$).

A - 3. Le client paie α_i pour chaque article a_i acheté, c'est-à-dire lorsque $X_i = 1$.

Conclusion

$$S = \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i.$$

B - La famille $((A = k))_{0 \leq k \leq n}$ est un système complet d'événements, de probabilités toutes égales à $\frac{1}{n+1} > 0$. Par la formule des probabilités totales et A.1 :

$$\begin{aligned} P(X_i = 1) &= \sum_{k=0}^n P(A = k) P((X_i = 1)/(A = k)) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} = \frac{1}{n(n+1)} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Conclusion

$P(X_i = 1) = \frac{1}{2}$; X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

C - Par linéarité de l'espérance et $E(X_i) = P(X_i = 1) = \frac{1}{2}$:

Conclusion

$$E(S) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \alpha_i.$$

D - 1. Par la formule des probabilités totales et A.2 :

$$P((X_i = 1) \cap (X_j = 1)) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{k(k-1)}{n(n-1)} = \frac{1}{(n+1)n(n-1)} \sum_{k=0}^n k(k-1).$$

Il reste à établir

$$\sum_{k=0}^n k(k-1) = \frac{(n+1)n(n-1)}{3}.$$

Méthode 1 — Télescopage. Pour tout k ,

$$(k+1)k(k-1) - k(k-1)(k-2) = k(k-1)((k+1) - (k-2)) = 3k(k-1). \text{ Donc}$$

$$\sum_{k=0}^n k(k-1) = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^n [(k+1)k(k-1) - k(k-1)(k-2)] = \frac{1}{3} [(n+1)n(n-1) - 0].$$

Méthode 2 — Sommes usuelles. On rappelle

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

et

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(cette dernière s'établit par récurrence : elle est vraie pour $n = 0$, et

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

). Alors

$$\sum_{k=0}^n k(k-1) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1-3)}{6} = \frac{(n+1)n(n-1)}{3}.$$

Le télescopage évite tout recours à des formules mémorisées et se généralise à

$$\sum k(k-1)\cdots(k-p+1);$$

la méthode 2 utilise les sommes classiques, qui serviront de nouveau en D.4.

Conclusion

$$P((X_i = 1) \cap (X_j = 1)) = \frac{1}{3}.$$

D - 2. $X_i X_j$ est la variable de Bernoulli indicatrice de $(X_i = 1) \cap (X_j = 1)$, donc $E(X_i X_j) = \frac{1}{3}$. Par la formule de Huygens :

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

$V(X_i) = V(X_j) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} > 0$, donc le coefficient de corrélation est défini :

$$\rho(X_i, X_j) = \frac{\text{Cov}(X_i, X_j)}{\sqrt{V(X_i)V(X_j)}} = \frac{1/12}{1/4} = \frac{1}{3}.$$

Si X_i et X_j étaient indépendantes, leur covariance serait nulle ; or elle vaut $\frac{1}{12} \neq 0$.
(Directement :

$$P((X_i = 1) \cap (X_j = 1)) = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{4} = P(X_i = 1)P(X_j = 1)$$

.)

Conclusion

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = \frac{1}{12}, \quad \rho(X_i, X_j) = \frac{1}{3}; X_i \text{ et } X_j \text{ ne sont pas indépendantes.}$$

D - 3. Par bilinéarité de la covariance :

$$V(S) = V\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 V(X_i) + \sum_{i \neq j} \alpha_i \alpha_j \text{Cov}(X_i, X_j) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 + \frac{1}{12} \sum_{i \neq j} \alpha_i \alpha_j,$$

la seconde somme portant sur les couples (i, j) d'éléments distincts de $\{1, \dots, n\}$. Or

$$\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right)^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 + \sum_{i \neq j} \alpha_i \alpha_j.$$

Donc

$$V(S) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 + \frac{1}{12} \left[\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right)^2 - \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \right].$$

Conclusion

$$V(S) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n (\alpha_i)^2 + \frac{1}{12} \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right)^2.$$

D - 4. Avec $\alpha_i = i$:

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

et

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(rappelé en D.1). Donc

$$\begin{aligned} V(S) &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{36} + \frac{n^2(n+1)^2}{48} = \frac{n(n+1)}{144} [4(2n+1) + 3n(n+1)] \\ &= \frac{n(n+1)}{144} (3n^2 + 11n + 4). \end{aligned}$$

Conclusion

l'égalité demandée est vérifiée. Contrôle : pour $n = 2$, $V(S) = \frac{6 \cdot 38}{144} = \frac{19}{12}$, ce que confirme un calcul direct (S prend les valeurs 0, 1, 2, 3 avec les probabilités $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}$, d'où $E(S) = \frac{3}{2}$, $E(S^2) = \frac{23}{6}$ et $V(S) = \frac{23}{6} - \frac{9}{4} = \frac{19}{12}$).

E - 1. Méthode 1 — Sommes de Riemann (méthode suggérée par l'énoncé).

La fonction $h : t \mapsto t^\beta$ (prolongée par $h(0) = 0$, ce qui est cohérent car $\beta > 0$) est continue sur le segment $[0, 1]$. Le théorème sur les sommes de Riemann donne

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^\beta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h\left(\frac{i}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 t^\beta dt = \frac{1}{\beta+1}.$$

Méthode 2 — Encadrement par des intégrales.

h est croissante sur $[0, +\infty[$. Pour $1 \leq i \leq n$ et $t \in [i-1, i]$, $t^\beta \leq i^\beta$; pour $t \in [i, i+1]$, $i^\beta \leq t^\beta$. En intégrant et en sommant (Chasles) :

$$\frac{n^{\beta+1}}{\beta+1} = \int_0^n t^\beta dt \leq \sum_{i=1}^n i^\beta \leq \int_1^{n+1} t^\beta dt \leq \frac{(n+1)^{\beta+1}}{\beta+1}.$$

En divisant par $n^{\beta+1}$:

$$\frac{1}{\beta+1} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^{\beta} \leq \frac{1}{\beta+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\beta+1},$$

et le théorème d'encadrement donne la même limite.

Les sommes de Riemann donnent directement la limite pour toute fonction continue ; l'encadrement, propre aux fonctions monotones, fournit en plus une majoration explicite de l'erreur.

Conclusion

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^{\beta} = \frac{1}{\beta+1}.$$

Équivalent de la somme.

$$\sum_{i=1}^n i^{\beta} = n^{\beta+1} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^{\beta},$$

et le second facteur tend vers $\frac{1}{\beta+1} \neq 0$. Donc

$$\frac{\sum_{i=1}^n i^{\beta}}{n^{\beta+1}/(\beta+1)} \rightarrow 1,$$

soit

$$\sum_{i=1}^n i^{\beta} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^{\beta+1}}{\beta+1}.$$

Équivalent de $E(S)$. D'après C,

$$E(S) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n i^\beta.$$

Conclusion

$$E(S) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^{\beta+1}}{2(\beta+1)}.$$

E - 2. D'après D.3,

$$V(S) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n i^{2\beta} + \frac{1}{12} \left(\sum_{i=1}^n i^\beta \right)^2.$$

On n'additionne pas des équivalents : on étudie le quotient par $n^{2\beta+2}$.

$$\frac{V(S)}{n^{2\beta+2}} = \frac{1}{6n} \cdot \frac{1}{n^{2\beta+1}} \sum_{i=1}^n i^{2\beta} + \frac{1}{12} \left(\frac{1}{n^{\beta+1}} \sum_{i=1}^n i^\beta \right)^2.$$

En appliquant E.1 avec $2\beta > 0$ à la place de β ,

$$\frac{1}{n^{2\beta+1}} \sum_{i=1}^n i^{2\beta} \rightarrow \frac{1}{2\beta+1},$$

donc le premier terme tend vers 0 (à cause du facteur $\frac{1}{6n}$). Le second tend vers

$$\frac{1}{12(\beta+1)^2}. \text{ Ainsi } \frac{V(S)}{n^{2\beta+2}} \rightarrow \frac{1}{12(\beta+1)^2} \neq 0.$$

Conclusion

$$V(S) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \gamma n^\delta \text{ avec } \gamma = \frac{1}{12(\beta+1)^2} \text{ et } \delta = 2\beta + 2.$$

Cohérence avec D.4 ($\beta = 1$) : $\frac{n(n+1)(3n^2+11n+4)}{144} \sim \frac{3n^4}{144} = \frac{n^4}{48}$, et

$$\gamma = \frac{1}{12 \cdot 4} = \frac{1}{48}, \delta = 4.$$

Partie II

A - La famille $((A = k))_{0 \leq k \leq n}$ est un système complet d'événements, donc

$$\sum_{k=0}^n P(A = k) = 1,$$

soit $a + \lambda H_n = 1$ où

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} > 0.$$

Donc $\lambda = \frac{1-a}{H_n}$. Réciproquement, cette valeur donne des nombres positifs ($a > 0$, $\lambda > 0$ car $a < 1$) de somme 1 : c'est bien une loi de probabilité.

Conclusion

$$\lambda = \frac{1-a}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}},$$

et $\lambda > 0$.

B - Loi de A. Pour $n = 3$, $H_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$, et $\lambda = \frac{11/12}{11/6} = \frac{1}{2}$. D'où :

k	0	1	2	3
$P(A = k)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

Loi de S . On conditionne par la valeur de A (choix équiprobables des articles) :

- si $A = 0 : S = 0$;
- si $A = 1 : S \in \{1, 2, 3\}$, chaque valeur avec probabilité conditionnelle $\frac{1}{3}$, d'où une contribution $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ à chacune;
- si $A = 2$: les parties $\{a_1, a_2\}, \{a_1, a_3\}, \{a_2, a_3\}$ donnent $S = 3, 4, 5$, chacune avec probabilité $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$;
- si $A = 3 : S = 6$ avec probabilité $\frac{1}{6}$.

En regroupant (probabilités totales; seule la valeur 3 est obtenue de deux façons, $\frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$) :

s	0	1	2	3	4	5	6
$P(S = s)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$

Contrôle : $\frac{1 + 2 + 2 + 3 + 1 + 1 + 2}{12} = 1$.

Espérance et variance.

Méthode 1 — À partir de la loi de S .

$$E(S) = \frac{0 + 2 + 4 + 9 + 4 + 5 + 12}{12} = \frac{36}{12} = 3 \text{ et}$$

$$E(S^2) = \frac{0 + 2 + 8 + 27 + 16 + 25 + 72}{12} = \frac{150}{12} = \frac{25}{2} \text{ (théorème de transfert). Par}$$

$$\text{Koenig-Huygens, } V(S) = \frac{25}{2} - 9 = \frac{7}{2}.$$

Méthode 2 — Par les indicatrices.

On a

$$P(X_i = 1) = \sum_{k=1}^3 P(A = k) \frac{k}{3} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{6} \right) = \frac{1}{2}$$

et, pour $i \neq j$, $P((X_i = 1) \cap (X_j = 1)) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{6} = \frac{1}{4}$. Donc

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0, \quad V(X_i) = \frac{1}{4}, \text{ et}$$

$$E(S) = \frac{1}{2}(1 + 2 + 3) = 3, \quad V(S) = \frac{1}{4}(1 + 4 + 9) = \frac{7}{2}.$$

La méthode 1 est la plus naturelle pour un cas numérique dont on a déterminé la loi ; la méthode 2 anticipe le cas général (questions C à E) et met en évidence ici une covariance nulle, ce que la question D.2 expliquera.

Conclusion

$$E(S) = 3 \text{ et } V(S) = \frac{7}{2}.$$

C - Par la formule des probabilités totales sur le système complet $((A = k))_k$ et A.1 de la partie I (le terme $k = 0$ est nul) :

$$P(X_i = 1) = \sum_{k=1}^n \frac{\lambda}{k} \cdot \frac{k}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{\lambda}{n} = \lambda.$$

Conclusion

$P(X_i = 1) = \lambda$; X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre λ (on a bien $\lambda \leq 1$, puisque c'est une probabilité, et même $\lambda \leq \frac{1}{H_n} < 1$).

D - 1. Par la formule des probabilités totales et A.2 de la partie I (termes $k = 0$ et $k = 1$ nuls) :

$$P((X_i = 1) \cap (X_j = 1)) = \sum_{k=2}^n \frac{\lambda}{k} \cdot \frac{k(k-1)}{n(n-1)} = \frac{\lambda}{n(n-1)} \sum_{k=2}^n (k-1) = \frac{\lambda}{n(n-1)} \cdot \frac{(n-1)n}{2}.$$

Conclusion

$$P((X_i = 1) \cap (X_j = 1)) = \frac{\lambda}{2}.$$

D - 2. Étape 1 : réduction à un seul événement. Pour deux variables de Bernoulli, l'indépendance équivaut à $P((X_i = 1) \cap (X_j = 1)) = P(X_i = 1)P(X_j = 1)$. En effet, la condition est nécessaire ; réciproquement, si elle est vérifiée, les événements $(X_i = 1)$ et $(X_j = 1)$ sont indépendants, donc aussi leurs complémentaires deux à deux (par exemple

$$\begin{aligned} P((X_i = 1) \cap (X_j = 0)) &= P(X_i = 1) - P((X_i = 1) \cap (X_j = 1)) \\ &= P(X_i = 1)(1 - P(X_j = 1)) \end{aligned}$$

), ce qui donne l'indépendance des variables.

Étape 2 : calcul. D'après C et D.1, X_i et X_j sont indépendantes si et seulement si

$$\frac{\lambda}{2} = \lambda^2, \text{ c'est-à-dire (comme } \lambda > 0) \quad \lambda = \frac{1}{2}, \text{ soit } \frac{1-a}{H_n} = \frac{1}{2} :$$

$$a = 1 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Étape 3 : compatibilité avec $a \in]0, 1[$. On a toujours $1 - \frac{H_n}{2} < 1$. La condition $a > 0$ équivaut à $H_n < 2$. Or $H_2 = \frac{3}{2}$, $H_3 = \frac{11}{6}$, $H_4 = \frac{25}{12} > 2$, et (H_n) est strictement croissante. Donc $H_n < 2 \iff n \in \{2, 3\}$.

Conclusion

X_i et X_j sont indépendantes si et seulement si

$$a = 1 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Cette relation n'est réalisable avec $a \in]0, 1[$ que pour $n = 2$ ($a = \frac{1}{4}$) et $n = 3$ ($a = \frac{1}{12}$: c'est le cas étudié en B, où l'on a effectivement trouvé une covariance nulle). Pour $n \geq 4$, X_i et X_j ne sont jamais indépendantes.

D - 3. Par la formule de Huygens, $E(X_i X_j) = P((X_i = 1) \cap (X_j = 1)) = \frac{\lambda}{2}$.

Conclusion

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = \frac{\lambda}{2} - \lambda^2 = \lambda \left(\frac{1}{2} - \lambda \right).$$

E - Espérance : par linéarité et C,

$$E(S) = \sum_{i=1}^n \alpha_i E(X_i) = \lambda \sum_{i=1}^n \alpha_i.$$

Variance : comme en I.D.3, avec $V(X_i) = \lambda(1 - \lambda)$ et $\text{Cov}(X_i, X_j) = \lambda \left(\frac{1}{2} - \lambda \right)$ pour $i \neq j$:

$$V(S) = \lambda(1 - \lambda) \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 + \lambda \left(\frac{1}{2} - \lambda \right) \left[\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right)^2 - \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \right].$$

Le coefficient de

$$\sum \alpha_i^2$$

vaut $\lambda(1 - \lambda) - \lambda \left(\frac{1}{2} - \lambda \right) = \frac{\lambda}{2}.$

Conclusion

$$E(S) = \lambda \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

et

$$V(S) = \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^n (\alpha_i)^2 + \lambda \left(\frac{1}{2} - \lambda \right) \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right)^2.$$

Contrôle avec B : $\lambda = \frac{1}{2},$

$$\sum \alpha_i = 6,$$

$$\sum \alpha_i^2 = 14$$

donnent $E(S) = 3$ et $V(S) = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}.$

F - 1. Question adaptée au programme actuel : l'énoncé d'origine demande « un algorithme » ; la version adaptée demande une fonction Python. Code adapté en Python.

On calcule successivement

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k},$$

$$\lambda = \frac{1-a}{H_n},$$

$$s_1 = \sum_{i=1}^n i^\beta$$

et

$$s_2 = \sum_{i=1}^n i^{2\beta},$$

puis on applique les formules de E.

Python

```
def esperance_variance(n, a, beta):
    H = 0
    for k in range(1, n + 1):      # k prend les valeurs 1, 2, ..., n
        H = H + 1 / k
    lam = (1 - a) / H              # valeur de lambda (question A)
    s1 = 0                          # somme des alpha_i
    s2 = 0                          # somme des alpha_i ** 2
    for i in range(1, n + 1):
        alpha = i ** beta
        s1 = s1 + alpha
        s2 = s2 + alpha ** 2
    E = lam * s1
    V = lam / 2 * s2 + lam * (1 / 2 - lam) * s1 ** 2
    return E, V

print(esperance_variance(10, 0.1, 1.5))
```

```
print(esperance_variance(20, 0.5, 1.2))
```

Variables : H accumule la somme harmonique, lam contient λ , s1 et s2 accumulent

$$\sum \alpha_i$$

et

$$\sum \alpha_i^2.$$

Les boucles utilisent `range(1, n + 1)`, dont la borne supérieure est exclue, afin que l'indice parcourt exactement $\{1, \dots, n\}$. La fonction renvoie le couple $(E(S), V(S))$.

Ce code a été exécuté. Résultats (arrondis à 10^{-2}) :

a. $n = 10, a = 0,1, \beta = 1,5 : E(S) \approx 43,84$ et $V(S) \approx 1670,19$.

b. $n = 20, a = 0,5, \beta = 1,2 : E(S) \approx 48,55$ et $V(S) \approx 6712,18$.

Contrôle expérimental (qui ne constitue pas une preuve) : une simulation de 200 000 achats sous (H'') pour le cas a, avec tirage de A selon sa loi puis d'une partie uniforme de A articles, a donné une moyenne empirique d'environ 43,8 et une variance empirique d'environ 1665, cohérentes avec les valeurs exactes.

F - 2. a. Pour $n \geq 2$:

$$v_n = u_n - u_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln(n) + \ln(n-1) = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Le développement limité usuel $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ en 0, appliqué à

$x = -\frac{1}{n} \rightarrow 0$, donne

$$v_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

donc $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}.$

Nature de la série : $-v_n \sim \frac{1}{2n^2}$; la suite $(-v_n)$ est donc strictement positive à partir d'un certain rang (en fait pour tout $n \geq 2$, puisque $\ln(1-x) < -x$ pour $x \in]0, 1[$ par concavité du logarithme). La série de Riemann

$$\sum \frac{1}{n^2}$$

converge ($2 > 1$). Par le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs,

$$\sum (-v_n)$$

converge, donc

$$\sum v_n$$

converge.

Conclusion

$$v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2} \text{ et la série}$$

$$\sum_{n \geq 2} v_n$$

est convergente.

F - 2. b. Par télescopage, pour $n \geq 2$,

$$\sum_{k=2}^n v_k = u_n - u_1 = u_n - 1.$$

La série

$$\sum v_k$$

convergeant, la suite de ses sommes partielles converge, donc (u_n) converge ; notons ℓ sa limite.

Équivalent. Pour $n \geq 2$, $\ln(n) > 0$ et

$$\frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{\ln(n)} = \frac{\ln(n) + u_n}{\ln(n)} = 1 + \frac{u_n}{\ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1,$$

car (u_n) converge (donc est bornée) et $\ln(n) \rightarrow +\infty$.

Remarque (autre méthode, non demandée par l'énoncé) : la décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t}$ fournit l'encadrement $\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln(n)$, qui donne aussi l'équivalent ; la méthode de l'énoncé apporte en plus la convergence de $H_n - \ln(n)$.

Conclusion

$$(u_n) \text{ converge et } 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n).$$

F - 3. D'après E et A,

$$E(S) = \lambda \sum_{i=1}^n i^\beta = \frac{1-a}{H_n} \sum_{i=1}^n i^\beta.$$

Par F.2.b, $H_n \sim \ln(n)$, et par I.E.1,

$$\sum_{i=1}^n i^\beta \sim \frac{n^{\beta+1}}{\beta+1}.$$

Les équivalents sont compatibles avec le produit et le quotient.

Conclusion

$$E(S) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(1-a) n^{\beta+1}}{(\beta+1) \ln(n)}.$$

F - 4. D'après E,

$$V(S) = \frac{\lambda}{2} \left[\sum_{i=1}^n i^{2\beta} + (1-2\lambda) \left(\sum_{i=1}^n i^\beta \right)^2 \right].$$

On étudie le quotient (sans additionner d'équivalents) :

$$\frac{V(S)}{\frac{\lambda}{2} n^{2\beta+2}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n^{2\beta+1}} \sum_{i=1}^n i^{2\beta} + (1-2\lambda) \left(\frac{1}{n^{\beta+1}} \sum_{i=1}^n i^\beta \right)^2.$$

Par I.E.1 appliqué à 2β , le premier terme tend vers $0 \cdot \frac{1}{2\beta+1} = 0$. Comme

$\lambda = \frac{1-a}{H_n} \rightarrow 0$ (car $H_n \rightarrow +\infty$), $1-2\lambda \rightarrow 1$, et le second terme tend vers $\frac{1}{(\beta+1)^2}$.

Donc $V(S) \sim \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{n^{2\beta+2}}{(\beta+1)^2}$, et avec $\lambda \sim \frac{1-a}{\ln(n)}$:

Conclusion

$$V(S) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(1-a)n^{2\beta+2}}{2(\beta+1)^2 \ln(n)}.$$

G - 1. Il s'agit d'une question de modélisation, sans réponse purement mathématique ; on argumente à partir des lois.

Sous (H') , le client a autant de chances d'acheter tout le rayon ($A = n$) que de n'acheter qu'un seul article, ou aucun : $P(A = k) = \frac{1}{n+1}$ pour tout k , et $E(A) = \frac{n}{2}$. Pour un rayon fourni, c'est peu réaliste.

Sous (H'') , $P(A = k) = \frac{\lambda}{k}$ décroît avec k : les petits achats sont plus probables que les gros, ce qui correspond mieux au comportement habituel d'un client ; de plus le paramètre a modélise séparément la probabilité de ne rien acheter. On a

$$E(A) = \sum_{k=1}^n k \frac{\lambda}{k} = n\lambda = \frac{(1-a)n}{H_n},$$

qui est négligeable devant n puisque $H_n \sim \ln(n)$.

Conclusion

l'hypothèse (H'') est la plus vraisemblable.

G - 2. On compare les gains moyens du vendeur, c'est-à-dire les espérances de S : sous (H') ,

$$E(S) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

(I.C) ; sous (H'') ,

$$E(S) = \lambda \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

(II.E). Comme

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i > 0$$

(prix strictement positifs), (H'') est plus avantageuse si et seulement si $\lambda > \frac{1}{2}$,

c'est-à-dire $1 - a > \frac{H_n}{2}$, soit $a < 1 - \frac{H_n}{2}$; les deux hypothèses sont équivalentes en moyenne si $a = 1 - \frac{H_n}{2}$ (cas d'indépendance de D.2).

Discussion selon n (avec $H_2 = \frac{3}{2}$, $H_3 = \frac{11}{6}$, $H_n \geq H_4 = \frac{25}{12} > 2$ pour $n \geq 4$) :

- $n = 2$: (H'') est plus avantageuse si $a < \frac{1}{4}$, équivalente si $a = \frac{1}{4}$, (H') est plus avantageuse si $a > \frac{1}{4}$.
- $n = 3$: (H'') est plus avantageuse si $a < \frac{1}{12}$, équivalente si $a = \frac{1}{12}$, (H') est plus avantageuse si $a > \frac{1}{12}$.
- $n \geq 4$: $1 - \frac{H_n}{2} < 0 < a$, donc $\lambda < \frac{1}{2}$ pour tout $a \in]0, 1[$: (H') est toujours plus avantageuse.

Conclusion

sauf pour $n \in \{2, 3\}$ et a petit ($a < \frac{1}{4}$ si $n = 2$, $a < \frac{1}{12}$ si $n = 3$), l'hypothèse (H') est la plus avantageuse en moyenne pour le vendeur. Pour n grand, l'écart est considérable : le rapport des espérances vaut $2\lambda = \frac{2(1-a)}{H_n} \rightarrow 0$.

Relevé des adaptations

- Problème, Partie II, F.1 : «Écrire un algorithme qui calcule $E(S)$ et $V(S)$ » est remplacé par «Écrire en Python une fonction `esperance_variance(n, a, beta)` qui calcule et renvoie $E(S)$ et $V(S)$ ». Code adapté en Python, conformément au référentiel informatique (Python uniquement) ; les résultats numériques demandés sont conservés.
- Problème, préambule : « $0 \leq A \leq N$ » est rectifié en « $0 \leq A \leq n$ » (coquille : N n'est pas défini dans le problème).
- Problème, Partie II, F.2 : les domaines de définition «pour $n \geq 1$ » (u_n) et «pour $n \geq 2$ » (v_n) sont précisés, $v_n = u_n - u_{n-1}$ n'ayant de sens que pour $n \geq 2$.
- Exercice 2, question 5.a : «Pour tout $n \in /N$ » est rectifié en «Pour tout $n \in \mathbb{N}$ » (coquille typographique).
- Coquilles orthographiques corrigées sans incidence mathématique («vetoriel», «variables», «fonctin», «Comparraison», «laplus», «Endéduire»).
- Exercice 2, question 2.b : aucune modification de l'énoncé ; la recherche des valeurs propres est menée par résolution du système $NX = \lambda X$ (ou vérification de vecteurs propres et argument de dimension), sans déterminant ni polynôme caractéristique.