



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

Ecricome

Mathématiques

1991

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

Dans tout l'exercice, pour $x \in]-1, +\infty[$, on note φ_x la fonction $t \mapsto \ln(1 + xt^2)$ sur $[0, 1]$.

1. (a) Il s'agit de vérifier que, pour $x > -1$, la fonction φ_x est bien définie et continue sur le segment $[0, 1]$: son intégrale est alors une intégrale sur un segment, sans difficulté de convergence.

Soit $x > -1$ et $t \in [0, 1]$.

Si $x \geq 0$, alors $xt^2 \geq 0$ donc $1 + xt^2 \geq 1 > 0$.

Si $-1 < x < 0$, alors, comme $0 \leq t^2 \leq 1$ et $x < 0$, on a $xt^2 \geq x$, donc $1 + xt^2 \geq 1 + x > 0$.

Dans les deux cas, $1 + xt^2 > 0$ pour tout $t \in [0, 1]$. La fonction $t \mapsto 1 + xt^2$ est continue et strictement positive sur $[0, 1]$, et $\ln$ est continue sur $]0, +\infty[$, donc par composition φ_x est continue sur le segment $[0, 1]$.

Conclusion

pour tout $x \in]-1, +\infty[$, l'intégrale $F(x) = \int_0^1 \ln(1 + xt^2) dt$ existe, donc F est définie sur $] -1, +\infty[$.

1. (b) On compare $F(x)$ et $F(y)$ pour $-1 < x < y$ en comparant les intégrandes, puis on utilise la positivité de l'intégrale, en prenant soin d'obtenir une inégalité stricte.

Soit $-1 < x < y$. On pose, pour $t \in [0, 1]$,

$$g(t) = \ln(1 + yt^2) - \ln(1 + xt^2)$$

D'après 1.(a), g est continue sur $[0, 1]$. Pour $t \in [0, 1]$, on a $1 + yt^2 \geq 1 + xt^2 > 0$ (car $(y - x)t^2 \geq 0$) et $\ln$ est croissante, donc $g(t) \geq 0$. De plus, $g(1) = \ln(1 + y) - \ln(1 + x) > 0$ car $1 + y > 1 + x > 0$ et $\ln$ est strictement croissante.

Par continuité de g en 1, il existe $\delta \in]0, 1[$ tel que, pour tout $t \in [1 - \delta, 1]$, $g(t) \geq \frac{g(1)}{2}$.

Par la relation de Chasles et la positivité de l'intégrale :

$$F(y) - F(x) = \int_0^1 g(t) dt = \int_0^{1-\delta} g(t) dt + \int_{1-\delta}^1 g(t) dt \geq 0 + \delta \frac{g(1)}{2} > 0$$

Conclusion

pour $-1 < x < y$, $F(x) < F(y)$; F est strictement croissante sur $] -1, +\infty[$.

2. (a) On doit majorer l'écart entre $\ln(u+h)$ et son approximation affine $\ln u + \frac{h}{u}$: c'est un reste de Taylor à l'ordre 1. On note $f = \ln$, de classe C^2 sur $]0, +\infty[$, avec $f'(y) = \frac{1}{y}$ et $f''(y) = -\frac{1}{y^2}$.

Soit $u > 0$ et h réel tel que $u - |h| > 0$. Le segment J d'extrémités u et $u+h$ est contenu dans $[u - |h|, u + |h|]$, lui-même contenu dans $]0, +\infty[$ puisque $u - |h| > 0$. Pour tout $y \in J$, on a $y \geq u - |h| > 0$, donc

$$|f''(y)| = \frac{1}{y^2} \leq \frac{1}{(u - |h|)^2}$$

Si $h = 0$, l'inégalité demandée s'écrit $0 \leq 0$ et elle est vraie. On suppose désormais $h \neq 0$.

Méthode 1 — Inégalité de Taylor-Lagrange.

La fonction f est de classe C^2 sur le segment J et $|f''|$ y est majorée par $M_2 = \frac{1}{(u - |h|)^2}$. L'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 entre u et $u+h$ donne :

$$|f(u+h) - f(u) - hf'(u)| \leq M_2 \frac{|h|^2}{2}$$

c'est-à-dire

$$\left| \ln(u+h) - \ln u - \frac{h}{u} \right| \leq \frac{h^2}{2(u-|h|)^2}$$

Méthode 2 — Formule de Taylor avec reste intégral.

La formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1 pour f , de classe C^2 sur J , s'écrit :

$$f(u+h) - f(u) - hf'(u) = \int_u^{u+h} (u+h-y)f''(y) dy = - \int_u^{u+h} \frac{u+h-y}{y^2} dy$$

Si $h > 0$: pour $y \in [u, u+h]$, on a $0 \leq u+h-y$ et $\frac{1}{y^2} \leq \frac{1}{(u-|h|)^2}$, donc

$$\begin{aligned} \left| \ln(u+h) - \ln u - \frac{h}{u} \right| &= \int_u^{u+h} \frac{u+h-y}{y^2} dy \leq \frac{1}{(u-|h|)^2} \int_u^{u+h} (u+h-y) dy \\ &= \frac{h^2}{2(u-|h|)^2} \end{aligned}$$

Si $h < 0$: en échangeant les bornes,

$$- \int_u^{u+h} \frac{u+h-y}{y^2} dy = - \int_{u+h}^u \frac{y-(u+h)}{y^2} dy$$

et pour $y \in [u+h, u]$, $0 \leq y-(u+h)$ et $\frac{1}{y^2} \leq \frac{1}{(u-|h|)^2}$, donc

$$\left| \ln(u+h) - \ln u - \frac{h}{u} \right| \leq \frac{1}{(u-|h|)^2} \int_{u+h}^u (y-u-h) dy = \frac{h^2}{2(u-|h|)^2}$$

La méthode 1 est la plus rapide lorsqu'on dispose d'un majorant de la dérivée seconde ;

la méthode 2 redémontre ce majorant à partir d'une égalité exacte et montre d'où vient le facteur $\frac{1}{2}$ (intégrale de $u + h - y$).

Conclusion

$$\text{pour tout } u > 0 \text{ et tout } h \text{ tel que } 0 < u - |h|, \quad \left| \ln(u + h) - \ln u - \frac{h}{u} \right| \leq \frac{h^2}{2(u - |h|)^2}.$$

2. (b) On écrit $D(x, h)$ comme une intégrale, on applique 2.(a) à l'intégrande pour chaque t , puis on minore le dénominateur selon le signe de x .

Soit $x > -1$ et $h \neq 0$ tel que $-1 < x - |h|$. Alors $x + h \geq x - |h| > -1$, donc $F(x + h)$ est défini d'après 1.(a). Pour $t \in [0, 1]$, $1 + xt^2 > 0$, donc $t \mapsto \frac{t^2}{1 + xt^2}$ est continue sur $[0, 1]$. Par linéarité de l'intégrale sur un segment,

$$D(x, h) = \frac{1}{h} \int_0^1 \left(\ln(1 + xt^2 + ht^2) - \ln(1 + xt^2) - \frac{ht^2}{1 + xt^2} \right) dt$$

Pour $t \in [0, 1]$ fixé, on applique 2.(a) avec $u = 1 + xt^2 > 0$ et ht^2 à la place de h . L'hypothèse est vérifiée :

$$u - |ht^2| = 1 + (x - |h|)t^2 > 0$$

En effet, si $x - |h| \geq 0$ c'est au moins 1, et si $-1 < x - |h| < 0$ on a $1 + (x - |h|)t^2 \geq 1 + x - |h| > 0$ car $t^2 \leq 1$. On obtient

$$\left| \ln(1 + xt^2 + ht^2) - \ln(1 + xt^2) - \frac{ht^2}{1 + xt^2} \right| \leq \frac{h^2 t^4}{2(1 + (x - |h|)t^2)^2}$$

Par l'inégalité triangulaire pour les intégrales et la croissance de l'intégrale :

$$|D(x, h)| \leq \frac{1}{|h|} \int_0^1 \frac{h^2 t^4}{2(1 + (x - |h|)t^2)^2} dt = \frac{|h|}{2} \int_0^1 \frac{t^4}{(1 + (x - |h|)t^2)^2} dt \quad (\star)$$

Cas $x > 0$. On prend $0 < |h| \leq x$ (ce qui assure aussi $-1 < x - |h|$). Alors $x - |h| \geq 0$, donc $1 + (x - |h|)t^2 \geq 1$ pour tout $t \in [0, 1]$, et $(\star)$ donne

$$|D(x, h)| \leq \frac{|h|}{2} \int_0^1 t^4 dt = \frac{|h|}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{|h|}{10}$$

Cas $x \in]-1, 0]$. On prend $0 < |h| < 1 + x$, ce qui équivaut à $-1 < x - |h|$. Alors $x - |h| \leq 0$ et $t^2 \leq 1$, donc $(x - |h|)t^2 \geq x - |h|$ et

$$1 + (x - |h|)t^2 \geq 1 + x - |h| > 0$$

Ainsi $\frac{t^4}{(1 + (x - |h|)t^2)^2} \leq \frac{t^4}{(1 + x - |h|)^2}$ et $(\star)$ donne

$$|D(x, h)| \leq \frac{|h|}{2(1 + x - |h|)^2} \int_0^1 t^4 dt = \frac{|h|}{10(1 + x - |h|)^2}$$

Conclusion

pour $x > 0$ et $0 < |h| \leq x$, $|D(x, h)| \leq \frac{|h|}{10}$; pour $x \in]-1, 0]$ et $0 < |h| < 1 + x$,
 $|D(x, h)| \leq \frac{|h|}{10(1 + x - |h|)^2}$.

2. (c) On montre que $D(x, h)$ tend vers 0 quand h tend vers 0 : cela signifie exactement que le taux d'accroissement de F en x admet une limite finie. On n'utilise aucun théorème de dérivation sous l'intégrale, uniquement les majorations de 2.(b).

Soit $x > -1$. On note $I(x) = \int_0^1 \frac{t^2}{1 + xt^2} dt$. Pour h non nul tel que $-1 < x - |h|$,

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - I(x) = D(x, h)$$

Si $x > 0$: pour $0 < |h| \leq x$, $|D(x, h)| \leq \frac{|h|}{10}$, qui tend vers 0 quand $h \rightarrow 0$.

Si $x \in]-1, 0]$: pour $0 < |h| \leq \frac{1+x}{2}$, on a $1+x-|h| \geq \frac{1+x}{2} > 0$, donc

$$|D(x, h)| \leq \frac{|h|}{10 \left(\frac{1+x}{2} \right)^2} = \frac{2|h|}{5(1+x)^2}$$

qui tend vers 0 quand $h \rightarrow 0$, par encadrement.

Dans les deux cas, $\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \rightarrow I(x)$ quand $h \rightarrow 0$.

Conclusion

F est dérivable sur $] -1, +\infty[$ et

$$\forall x \in]-1, +\infty[, \quad F'(x) = \int_0^1 \frac{t^2}{1+xt^2} dt$$

3. On calcule l'intégrale obtenue en 2.(c) en séparant les cas selon le signe de x , après avoir écrit, pour $x \neq 0$ et $t \in [0, 1]$:

$$\frac{t^2}{1+xt^2} = \frac{1}{x} \cdot \frac{xt^2}{1+xt^2} = \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{1+xt^2} \right)$$

d'où, par linéarité,

$$F'(x) = \frac{1}{x} \left(1 - \int_0^1 \frac{dt}{1+xt^2} \right) \quad (x \neq 0)$$

3. (a) Pour $x = 0$: $F'(0) = \int_0^1 t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$.

Conclusion

$$F'(0) = \frac{1}{3}.$$

3. (b) Soit $x > 0$. Dans $\int_0^1 \frac{dt}{1+xt^2}$, on effectue le changement de variable affine $s = \sqrt{x}t$ (avec x fixé), $ds = \sqrt{x}dt$; quand t décrit $[0, 1]$, s décrit $[0, \sqrt{x}]$:

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+xt^2} = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{\sqrt{x}} \frac{ds}{1+s^2} = \frac{1}{\sqrt{x}} [\arctan s]_0^{\sqrt{x}} = \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

Conclusion

pour $x > 0$,

$$F'(x) = \frac{1}{x} - \frac{\arctan \sqrt{x}}{x\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - \arctan \sqrt{x}}{x\sqrt{x}}$$

3. (c) Soit $x \in]-1, 0[$. On pose $a = \sqrt{-x}$, de sorte que $a \in]0, 1[$ et $x = -a^2$. Pour $t \in [0, 1]$, $1+xt^2 = 1-a^2t^2 = (1-at)(1+at)$ avec $1-at \geq 1-a > 0$ et $1+at > 0$.
On vérifie la décomposition

$$\frac{1}{1-a^2t^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-at} + \frac{1}{1+at} \right)$$

puisque $\frac{1}{1-at} + \frac{1}{1+at} = \frac{(1+at) + (1-at)}{(1-at)(1+at)} = \frac{2}{1-a^2t^2}$. Une primitive de $t \mapsto \frac{1}{1-at}$ sur $[0, 1]$ est $t \mapsto -\frac{1}{a} \ln(1-at)$, et une primitive de $t \mapsto \frac{1}{1+at}$ est $t \mapsto \frac{1}{a} \ln(1+at)$. Donc

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+xt^2} = \frac{1}{2a} \left[\ln(1+at) - \ln(1-at) \right]_0^1 = \frac{1}{2a} \ln \frac{1+a}{1-a}$$

Conclusion

pour $x \in]-1, 0[$,

$$F'(x) = \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{-x}} \ln \frac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}} \right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x\sqrt{-x}} \ln \frac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}}$$

Contrôle de cohérence : ces expressions sont strictement positives (l'intégrande $\frac{t^2}{1+xt^2}$ est positive et non identiquement nulle), ce qui est conforme à 1.(b). Par exemple, pour $x = -\frac{1}{2}$, on obtient $F'(-\frac{1}{2}) \approx 0,493$.

Exercice 2

Modélisation. On fixe un téléspectateur. On note K le nombre de spots, parmi les n , qu'il perçoit comme originaux et bien faits, et R l'événement « il retient le nom du produit ». Chaque spot est perçu ainsi avec probabilité p , indépendamment des autres : K compte les succès dans n épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre p , donc K suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. L'énoncé donne, pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P_{(K=k)}(R) = ak + bk^2$; cela suppose implicitement $ak + bk^2 \leq 1$ pour $k \leq n$, c'est-à-dire $an + bn^2 \leq 1$.

1. On applique la formule des probabilités totales au système complet $((K = k))_{0 \leq k \leq n}$, puis on reconnaît des moments de K .

Comme $0 < p < 1$, chaque $P(K = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ est strictement positif, et

$$P(R) = \sum_{k=0}^n P(K = k) P_{(K=k)}(R) = \sum_{k=0}^n (ak + bk^2) P(K = k) = a E(K) + b E(K^2)$$

la dernière égalité résultant de la linéarité de la somme finie et du théorème de transfert (K est finie, donc $E(K)$ et $E(K^2)$ existent). Reste à calculer $E(K^2)$.

Méthode 1 — Par la variance.

Pour $K \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, on sait que $E(K) = np$ et $V(K) = np(1 - p)$. La formule de Koenig-Huygens donne

$$E(K^2) = V(K) + E(K)^2 = np(1 - p) + n^2p^2$$

Méthode 2 — Par le moment factoriel $E(K(K - 1))$.

Par transfert, en utilisant pour $2 \leq k \leq n$ l'identité $k(k - 1)\binom{n}{k} = n(n - 1)\binom{n - 2}{k - 2}$ (qui découle de $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n - k)!}$), et en notant $q = 1 - p$:

$$\begin{aligned} E(K(K - 1)) &= \sum_{k=2}^n k(k - 1)\binom{n}{k}p^kq^{n-k} = n(n - 1)p^2 \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n - 2}{j}p^jq^{n-2-j} \\ &= n(n - 1)p^2(p + q)^{n-2} = n(n - 1)p^2 \end{aligned}$$

(les termes $k = 0$ et $k = 1$ sont nuls ; si $n = 1$ la somme est vide et le résultat 0 reste vrai).

Par linéarité, $E(K^2) = E(K(K - 1)) + E(K) = n(n - 1)p^2 + np = n^2p^2 + np(1 - p)$.

La méthode 1 utilise directement les résultats du cours sur la loi binomiale ; la méthode 2 redémontre le calcul et se transpose à d'autres lois où $E(K(K - 1))$ se calcule simplement.

Conclusion

la probabilité qu'un téléspectateur donné retienne le nom du produit est

$$P(R) = anp + b(np(1 - p) + n^2p^2) = bp^2n^2 + p(a + b(1 - p))n$$

2. Tous les téléspectateurs sont dans la même situation ; on interprète la proportion de téléspectateurs retenant le nom comme la probabilité $P(R)$ (pour une population nombreuse de téléspectateurs se comportant indépendamment, la loi faible des grands nombres justifie cette interprétation). On cherche donc les entiers $n \geq 1$ tels que $P(R) \geq \frac{2}{5}$.

On pose $c = a + b(1 - p)$; on a $c > 0$ car $a > 0, b > 0, 1 - p > 0$. On considère la fonction polynomiale

$$g(y) = bp^2y^2 + pcy - \frac{2}{5}$$

Sur $[0, +\infty[$, $g'(y) = 2bp^2y + pc > 0$, donc g est strictement croissante ; $g(0) = -\frac{2}{5} < 0$ et $g(y) \rightarrow +\infty$ quand $y \rightarrow +\infty$. Par le théorème de la bijection, g s'annule en un unique $y_0 > 0$, et pour $y \geq 0$: $g(y) \geq 0 \iff y \geq y_0$.

Le discriminant de g vaut $p^2c^2 + \frac{8}{5}bp^2 = p^2\left(c^2 + \frac{8b}{5}\right) > 0$ et, comme $p > 0$, la racine positive est

$$y_0 = \frac{-pc + p\sqrt{c^2 + \frac{8b}{5}}}{2bp^2} = \frac{\sqrt{c^2 + \frac{8b}{5}} - c}{2bp}$$

Conclusion

au moins 40 % des téléspectateurs retiennent le nom du produit si et seulement si

$$n \geq \frac{\sqrt{(a + b(1 - p))^2 + \frac{8b}{5}} - a - b(1 - p)}{2bp}$$

et le plus petit nombre de spots convenable est le plus petit entier supérieur ou égal à cette quantité.

Remarque : le modèle n'a de sens que si $an + bn^2 \leq 1$. Comme

$P(R) = E(aK + bK^2) \leq an + bn^2$, la valeur trouvée est compatible avec le modèle

seulement si elle vérifie aussi cette contrainte ; dans le cas contraire, les constantes a, b, p données rendent l'objectif de 40 % hors de portée du modèle.

Problème

Partie I

Modélisation commune. À chaque expérience, la boule tirée dans chaque urne est choisie au hasard (toutes les boules d'une urne ont la même probabilité d'être tirées) et, la composition des urnes étant connue, les tirages dans U_1 et dans U_2 sont indépendants. Une expérience ne change pas le nombre de boules de chaque urne : U_1 et U_2 gardent leurs effectifs initiaux. Le nombre X_k change d'au plus une unité à chaque expérience :

- il diminue de 1 si l'on tire une blanche dans U_1 et une noire dans U_2 ;
- il augmente de 1 si l'on tire une noire dans U_1 et une blanche dans U_2 ;
- il ne change pas si les deux boules tirées ont la même couleur.

On note $b_k^{(1)}$ (resp. $b_k^{(2)}$) l'événement « prélever une boule blanche dans U_1 (resp. U_2) lors de la k -ième expérience ». Pour les formules de probabilités totales, on utilise l'égalité

$$P((X_k = i) \cap (X_{k-1} = j)) = P(X_{k-1} = j) P_{(X_{k-1}=j)}(X_k = i)$$

lorsque $P(X_{k-1} = j) > 0$; lorsque $P(X_{k-1} = j) = 0$, les deux membres des formules ci-dessous contiennent un terme nul et les formules restent valables.

A.

Ici chaque urne contient toujours deux boules et il y a en tout deux blanches et deux noires. Si $X_{k-1} = j$, l'urne U_1 contient j blanches et $2 - j$ noires, et l'urne U_2 contient $2 - j$ blanches et j noires. Par récurrence, $X_k(\Omega) \subset \{0, 1, 2\}$ pour tout k .

1. On part de $X_0 = 1$: chaque urne contient une blanche et une noire.

$X_1 = 0$ si et seulement si on tire la blanche de U_1 et la noire de U_2 . Par indépendance des deux tirages, $P(X_1 = 0) = P(b_1^{(1)})P(\overline{b_1^{(2)}}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

$X_1 = 2$ si et seulement si on tire la noire de U_1 et la blanche de U_2 :
 $P(X_1 = 2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

$X_1 = 1$ dans les autres cas : $P(X_1 = 1) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

Conclusion

$$X_1(\Omega) = \{0, 1, 2\} \text{ avec } P(X_1 = 0) = \frac{1}{4}, \quad P(X_1 = 1) = \frac{1}{2}, \quad P(X_1 = 2) = \frac{1}{4}.$$

2. On détermine les probabilités de transition conditionnellement à chaque valeur de X_{k-1} , puis on applique la formule des probabilités totales avec le système complet $((X_{k-1} = 0), (X_{k-1} = 1), (X_{k-1} = 2))$ (pour $k \geq 1$).

Si $X_{k-1} = 0$: U_1 contient deux noires et U_2 deux blanches ; on tire forcément une noire de U_1 et une blanche de U_2 , donc $X_k = 1$ avec probabilité 1.

Si $X_{k-1} = 2$: de même, on tire forcément une blanche de U_1 et une noire de U_2 , donc $X_k = 1$ avec probabilité 1.

Si $X_{k-1} = 1$: chaque urne contient une blanche et une noire, et comme en 1, X_k vaut 0, 1, 2 avec les probabilités conditionnelles $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$.

La formule des probabilités totales donne, pour tout $k \geq 1$:

$$P(X_k = 0) = \frac{1}{4}P(X_{k-1} = 1)$$

$$P(X_k = 1) = P(X_{k-1} = 0) + \frac{1}{2}P(X_{k-1} = 1) + P(X_{k-1} = 2)$$

$$P(X_k = 2) = \frac{1}{4}P(X_{k-1} = 1)$$

Conclusion

c'est le système cherché, initialisé par $P(X_0 = 1) = 1$.

3. (a) Code adapté en Python. La fonction part de la loi de X_0 , c'est-à-dire $(u_0, v_0, w_0) = (0, 1, 0)$, et applique k fois le système de la question 2. Les nouvelles valeurs doivent être calculées à partir des anciennes : on utilise donc des variables auxiliaires avant de mettre à jour u, v, w .

Python

```
def loi(k):

    u = 0      # P(X_0 = 0)
    v = 1      # P(X_0 = 1)
    w = 0      # P(X_0 = 2)

    for i in range(k):          # k itérations : passage de X_i à X_(i+1)

        nu = v / 4
        nv = u + v / 2 + w
        nw = v / 4

        u = nu
        v = nv
        w = nw

    return u, v, w

print(loi(3))    # affiche (0.1875, 0.625, 0.1875)
```

La boucle `for i in range(k)` s'exécute exactement k fois (pour i allant de 0 à $k-1$) ; après la i -ième itération, (u, v, w) contient (u_i, v_i, w_i) . Pour $k = 0$, la boucle ne s'exécute pas et la fonction renvoie $(0, 1, 0)$. Ce code a été exécuté : il renvoie $(0,25 ; 0,5 ; 0,25)$ pour $k = 1$ et $(0,1875 ; 0,625 ; 0,1875)$ pour $k = 3$, en accord avec la question 1 et avec les formules de 3.(c).

3. (b) D'après la question 2, pour tout $k \geq 1$, $u_k = w_k = \frac{1}{4}v_{k-1}$: les suites u et w s'expriment à l'aide de v . Il reste à obtenir une relation ne faisant intervenir que v .

Méthode 1 — Avec la somme des probabilités (récurrence d'ordre 1).

Pour tout $k \geq 0$, X_k est à valeurs dans $\{0, 1, 2\}$, donc $u_k + v_k + w_k = 1$. De plus $u_k = w_k$ pour tout $k \geq 0$ (pour $k \geq 1$ par la question 2, et $u_0 = w_0 = 0$). Ainsi

$$\forall k \geq 0, \quad u_k = w_k = \frac{1 - v_k}{2}$$

En reportant dans la deuxième relation de la question 2, pour $k \geq 1$:

$$v_k = u_{k-1} + \frac{1}{2}v_{k-1} + w_{k-1} = (1 - v_{k-1}) + \frac{1}{2}v_{k-1} = 1 - \frac{1}{2}v_{k-1}$$

Méthode 2 — Par substitution (récurrence d'ordre 2).

Pour $k \geq 2$, on remplace u_{k-1} et w_{k-1} par $\frac{1}{4}v_{k-2}$ dans la deuxième relation :

$$v_k = \frac{1}{4}v_{k-2} + \frac{1}{2}v_{k-1} + \frac{1}{4}v_{k-2} = \frac{1}{2}v_{k-1} + \frac{1}{2}v_{k-2}$$

avec $v_0 = 1$ et $v_1 = \frac{1}{2}$.

La méthode 1 exploite une information probabiliste (la somme des probabilités vaut 1) et aboutit à une suite arithmético-géométrique ; la méthode 2 n'utilise que le système linéaire et conduit à une récurrence linéaire d'ordre deux, utile lorsqu'on ne dispose pas d'une telle relation de conservation.

Conclusion

la connaissance de v détermine u et w par $u_k = w_k = \frac{1-v_k}{2}$ (ou $u_k = w_k = \frac{1}{4}v_{k-1}$ pour $k \geq 1$), et v vérifie $v_0 = 1$ et $v_k = 1 - \frac{1}{2}v_{k-1}$ pour $k \geq 1$ (ou, de façon équivalente, $v_k = \frac{1}{2}v_{k-1} + \frac{1}{2}v_{k-2}$ pour $k \geq 2$, avec $v_0 = 1, v_1 = \frac{1}{2}$).

3. (c) On résout la récurrence obtenue.

Méthode 1 — Suite arithmético-géométrique.

Le réel ℓ tel que $\ell = 1 - \frac{1}{2}\ell$ est $\ell = \frac{2}{3}$. Pour $k \geq 1$, en soustrayant,
 $v_k - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2}\left(v_{k-1} - \frac{2}{3}\right)$. La suite $\left(v_k - \frac{2}{3}\right)$ est géométrique de raison $-\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$, d'où

$$\forall k \geq 0, \quad v_k = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

Méthode 2 — Récurrence linéaire d'ordre deux.

L'équation caractéristique de $v_k = \frac{1}{2}v_{k-1} + \frac{1}{2}v_{k-2}$ est $r^2 - \frac{1}{2}r - \frac{1}{2} = 0$, soit $(r-1)\left(r + \frac{1}{2}\right) = 0$: ses racines sont réelles et distinctes, 1 et $-\frac{1}{2}$. Il existe donc des réels α, β tels que $v_k = \alpha + \beta\left(-\frac{1}{2}\right)^k$ pour tout $k \geq 0$. Les conditions $v_0 = 1$ et $v_1 = \frac{1}{2}$ donnent $\alpha + \beta = 1$ et $\alpha - \frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}$, d'où $\frac{3\beta}{2} = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{3}$ et $\alpha = \frac{2}{3}$. On retrouve la même formule.

Loi de X_k . Avec $u_k = w_k = \frac{1-v_k}{2}$:

$$u_k = w_k = \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

Vérification : pour $k = 1$, $u_1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$ et $v_1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$, conformément à la question 1.

Conclusion

pour tout $k \geq 0$,

$$P(X_k = 0) = P(X_k = 2) = \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \left(-\frac{1}{2}\right)^k, \quad P(X_k = 1) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

En particulier, comme $\left|-\frac{1}{2}\right| < 1$, ces probabilités tendent respectivement vers $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{6}$.

B.

Notations. On pose $N_1 = b + n$ (effectif constant de U_1), $N_2 = r + s$ (effectif constant de U_2) ; il y a $b + r$ boules blanches et $n + s$ noires en tout. Au départ, U_1 contient b blanches : $X_0 = b$, comme au A où $X_0 = 1 = b$. Si $X_{k-1} = j$, alors :

- U_1 contient j blanches et $b + n - j$ noires ;
- U_2 contient $b + r - j$ blanches et $N_2 - (b + r - j) = s - b + j$ noires.

Avec la modélisation commune, les probabilités conditionnelles de transition depuis l'état j sont :

$$d(j) = \frac{j}{N_1} \cdot \frac{s - b + j}{N_2} \text{ (diminution de 1),}$$

$$m(j) = \frac{b + n - j}{N_1} \cdot \frac{b + r - j}{N_2} \text{ (augmentation de 1),}$$

$$c(j) = \frac{j(b + r - j) + (b + n - j)(s - b + j)}{N_1 N_2} \text{ (stabilité),}$$

et

$$d(j) + m(j) + c(j) = \frac{(j + (b + n - j))((s - b + j) + (b + r - j))}{N_1 N_2} = 1.$$

1. On applique ces formules avec $j = X_0 = b$: U_1 contient b blanches et n noires, U_2 contient r blanches et s noires.

$$P(X_1 = b - 1) = \frac{b}{b + n} \cdot \frac{s}{r + s} = \frac{bs}{(b + n)(r + s)}$$

$$P(X_1 = b + 1) = \frac{n}{b + n} \cdot \frac{r}{r + s} = \frac{nr}{(b + n)(r + s)}$$

$$P(X_1 = b) = \frac{b}{b + n} \cdot \frac{r}{r + s} + \frac{n}{b + n} \cdot \frac{s}{r + s} = \frac{br + ns}{(b + n)(r + s)}$$

Ces trois probabilités sont strictement positives puisque $b, n, r, s \geq 1$, et leur somme vaut $\frac{(b + n)(r + s)}{(b + n)(r + s)} = 1$.

Conclusion

$X_1(\Omega) = \{b - 1, b, b + 1\}$, avec la loi ci-dessus.

2. (a) L'événement $(X_k = 0)$ signifie que les $b + r$ boules blanches sont toutes dans U_2 , qui contient $r + s$ boules.

Condition nécessaire. Si $(X_k = 0)$ est réalisé, alors $b + r \leq r + s$, c'est-à-dire $b \leq s$. Si $b > s$, $(X_k = 0)$ est impossible pour tout k .

Elle est suffisante (pour un k convenable). Supposons $b \leq s$. Pour $1 \leq j \leq b$, on a $j \geq 1$ et $s - b + j \geq 1$, donc $d(j) > 0$. En partant de $X_0 = b$, la suite de b expériences où X diminue à chaque fois de 1 a une probabilité égale à $d(b)d(b-1)\cdots d(1) > 0$ (formule des probabilités composées), donc $P(X_b = 0) > 0$.

Conclusion

un événement $(X_k = 0)$ est réalisable si et seulement si $b \leq s$; il l'est alors par exemple pour $k = b$.

2. (b) On suppose $b \leq s$ et $k \geq 1$. Comme X varie d'au plus 1 à chaque expérience et reste positif, $(X_k = 0)$ ne peut provenir que de $(X_{k-1} = 0)$ (stabilité) ou de $(X_{k-1} = 1)$ (diminution). Avec

$$c(0) = \frac{(b+n)(s-b)}{(b+n)(r+s)} = \frac{s-b}{r+s}, \quad d(1) = \frac{1}{b+n} \cdot \frac{s-b+1}{r+s}$$

la formule des probabilités totales appliquée au système complet $((X_{k-1} = j))_j$ donne :

Conclusion

pour tout $k \geq 1$,

$$P(X_k = 0) = \frac{s-b}{r+s} P(X_{k-1} = 0) + \frac{s-b+1}{(b+n)(r+s)} P(X_{k-1} = 1)$$

3. (a) On cherche les contraintes que doit vérifier $j = X_k$, puis on montre que toutes les valeurs compatibles sont effectivement atteintes.

Contraintes. Les quatre effectifs décrits dans les notations sont des entiers positifs :

$$j \geq 0, \quad b+n-j \geq 0, \quad b+r-j \geq 0, \quad s-b+j \geq 0$$

soit $\max(0, b-s) \leq j \leq b + \min(n, r)$. On note $j_{\min} = \max(0, b-s)$ et $j_{\max} = b + \min(n, r)$; on a $j_{\min} \leq b \leq j_{\max}$.

Toutes ces valeurs sont atteintes. Pour $j_{\min} \leq j < j_{\max}$, on a $b+n-j \geq 1$ et $b+r-j \geq 1$, donc $m(j) > 0$: depuis j , on passe à $j+1$ avec une probabilité strictement positive. Pour $j_{\min} < j \leq j_{\max}$, on a $j \geq 1$ et $s-b+j \geq 1$, donc $d(j) > 0$. Ainsi, pour $\ell \in \llbracket j_{\min}, j_{\max} \rrbracket$, en

partant de $X_0 = b$ et en effectuant $|\ell - b|$ pas dans la bonne direction, on obtient $P(X_{|\ell-b|} = \ell) > 0$.

Enfin, comme X varie d'au plus 1 par expérience, $|X_k - b| \leq k$.

Conclusion

les valeurs que peut atteindre X_k sont les entiers ℓ tels que

$$\max(0, b - s) \leq \ell \leq b + \min(n, r)$$

chacune d'elles étant atteinte avec une probabilité non nulle pour un k convenable ; pour k fixé, on a de plus $b - k \leq X_k \leq b + k$.

3. (b) Avec $b \leq s$ et $n \leq r$, on a $\max(0, b - s) = 0$ et $b + \min(n, r) = b + n = N_1$: X_k prend ses valeurs dans $\llbracket 0, N_1 \rrbracket$, toutes les compositions de U_1 étant possibles. Pour $j \in \llbracket 0, N_1 \rrbracket$, tous les facteurs $j, b + n - j, b + r - j \geq r - n \geq 0$ et $s - b + j \geq 0$ sont positifs, donc les formules d, m, c sont valables pour tous ces états ; de plus $d(0) = 0$ et $m(N_1) = 0$.

L'événement $(X_k = \ell)$ provient de $(X_{k-1} = \ell - 1)$ par augmentation, de $(X_{k-1} = \ell)$ par stabilité ou de $(X_{k-1} = \ell + 1)$ par diminution. La formule des probabilités totales donne :

Conclusion

pour tout $k \geq 1$ et tout $\ell \in \llbracket 0, b + n \rrbracket$,

$$P(X_k = \ell) = m(\ell - 1)P(X_{k-1} = \ell - 1) + c(\ell)P(X_{k-1} = \ell) + d(\ell + 1)P(X_{k-1} = \ell + 1)$$

où les coefficients sont donnés par :

$$(b + n)(r + s) m(\ell - 1) = (b + n - \ell + 1)(b + r - \ell + 1)$$

$$(b+n)(r+s)c(\ell) = \ell(b+r-\ell) + (b+n-\ell)(s-b+\ell)$$

$$(b+n)(r+s)d(\ell+1) = (\ell+1)(s-b+\ell+1)$$

en convenant que le terme en $P(X_{k-1} = \ell - 1)$ est absent pour $\ell = 0$ et que le terme en $P(X_{k-1} = \ell + 1)$ est absent pour $\ell = b + n$. Le système est initialisé par $P(X_0 = b) = 1$.

Pour $b = n = r = s = 1$, on retrouve le système de A.2 : $m(0) = 1$, $c(1) = \frac{1}{2}$,

$$d(1) = m(1) = \frac{1}{4}, d(2) = 1.$$

Partie II

Ici $b = s = 1, n = 2, r = 3$, donc $N_1 = 3, N_2 = 4, N_1 N_2 = 12$; les hypothèses $b \leq s$ et $n \leq r$ de I.B.3.(b) sont satisfaites et X_k est à valeurs dans $\{0, 1, 2, 3\}$.

1. On calcule les coefficients du système de I.B.3.(b) et on compare avec M .

Avec $s - b = 0$ et $b + r = 4, b + n = 3$: $d(j) = \frac{j^2}{12}$, $m(j) = \frac{(3-j)(4-j)}{12}$,
 $c(j) = \frac{j(4-j) + (3-j)j}{12} = \frac{j(7-2j)}{12}$. D'où le tableau des probabilités de passer de l'état j (colonne) à l'état i (ligne) :

arrivée i / départ j	0	1	2	3
0	$c(0) = 0$		0	0

$$d(1) = \frac{1}{12}$$

arrivée i / départ j	0	1	2	3
1	$m(0) = 1$			0
		$c(1) = \frac{5}{12}$	$d(2) = \frac{4}{12}$	
2	0			
		$m(1) = \frac{6}{12}$	$c(2) = \frac{6}{12}$	$d(3) = \frac{9}{12}$
3	0	0		
			$m(2) = \frac{2}{12}$	$c(3) = \frac{3}{12}$

Ce tableau est exactement M . Le système de I.B.3.(b) s'écrit, pour $k \geq 1$ et $i \in \{0, 1, 2, 3\}$,

$$P(X_k = i) = \sum_{j=0}^3 M_{i,j} P(X_{k-1} = j),$$

ce qui est la i -ième coordonnée de MC_{k-1} . Par exemple, la première ligne donne

$$P(X_k = 0) = \frac{1}{12}P(X_{k-1} = 1), \text{ conformément à I.B.2.(b) avec } s - b = 0.$$

Enfin $X_0 = b = 1$, donc $C_0 = {}^t(0, 1, 0, 0)$ est bien la colonne des probabilités $P(X_0 = \ell)$.

Conclusion

pour tout entier $k > 0$, $C_k = MC_{k-1}$.

2. Le coefficient $M_{i,j}$ est la probabilité conditionnelle que U_1 contienne i boules blanches après une expérience sachant qu'elle en contenait j avant. La colonne j décrit donc la loi du nombre de blanches dans U_1 après une expérience à partir de la composition j : les événements « i blanches après l'expérience », pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, forment un système complet, donc la somme de leurs probabilités conditionnelles vaut 1.

Vérification directe :

$$\frac{0 + 12 + 0 + 0}{12} = \frac{1 + 5 + 6 + 0}{12} = \frac{0 + 4 + 6 + 2}{12} = \frac{0 + 0 + 9 + 3}{12} = 1.$$

Conclusion

chaque colonne de M est une loi de probabilité (celle de l'état suivant sachant l'état présent), donc la somme de ses coefficients vaut 1. Cela traduit aussi le fait que la somme des coordonnées de $C_k = MC_{k-1}$ reste égale à 1.

3. (a) On calcule $12M \cdot Q$, avec

$$12M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Colonne 1 de Q , ${}^t(1, -3, 3, -1)$:

$$(0 - 3 + 0 + 0, 12 - 15 + 12 + 0, 0 - 18 + 18 - 9, 0 + 0 + 6 - 3) = (-3, 9, -9, 3).$$

Colonne 2 de Q , ${}^t(1, 5, -3, -3)$:

$$(5, 12 + 25 - 12, 30 - 18 - 27, -6 - 9) = (5, 25, -15, -15).$$

Colonne 3 de Q , ${}^t(1, 12, 18, 4)$:

$$(12, 12 + 60 + 72, 72 + 108 + 36, 36 + 12) = (12, 144, 216, 48).$$

Colonne 4 de Q , ${}^t(1, 0, -3, 2)$:

$$(0, 12 + 0 - 12 + 0, 0 + 0 - 18 + 18, 0 + 0 - 6 + 6) = (0, 0, 0, 0).$$

Conclusion

$$MQ = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -3 & 5 & 12 & 0 \\ 9 & 25 & 144 & 0 \\ -9 & -15 & 216 & 0 \\ 3 & -15 & 48 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{5}{12} & 1 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{25}{12} & 12 & 0 \\ -\frac{3}{4} & -\frac{15}{12} & 18 & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{15}{12} & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

3. (b) On note Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 les colonnes de Q . La j -ième colonne de MQ est MQ_j , et la lecture de 3.(a) montre que :

$$MQ_1 = -\frac{1}{4}Q_1, \quad MQ_2 = \frac{5}{12}Q_2, \quad MQ_3 = Q_3, \quad MQ_4 = 0 = 0 \cdot Q_4$$

(par exemple, la colonne 2 de $12MQ$ vaut $(5, 25, -15, -15) = 5(1, 5, -3, -3)$). Les colonnes Q_j sont non nulles (leur première coordonnée vaut 1).

Conclusion

$-\frac{1}{4}, \frac{5}{12}, 1$ et 0 sont valeurs propres de M , de vecteurs propres associés respectifs Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 .

3. (c) Méthode 1 — Vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes.

Les vecteurs Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 sont des vecteurs propres de M associés aux valeurs propres deux à deux distinctes $-\frac{1}{4}, \frac{5}{12}, 1, 0$. Une famille de vecteurs propres associés à des

valeurs propres distinctes est libre ; c'est donc une famille libre de 4 vecteurs de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, espace de dimension 4 : c'est une base. La matrice Q , dont les colonnes forment une base, est de rang 4 donc inversible.

Méthode 2 — Résolution directe.

À la question 3.(d), on montre que, pour tout $Y \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, le système $QX = Y$ possède une unique solution, ce qui prouve directement que Q est inversible et fournit Q^{-1} .

La méthode 1 fait l'économie de tout calcul et justifie que M est diagonalisable ; la méthode 2 est purement calculatoire mais donne en même temps l'inverse.

Diagonalisation. On pose

$$D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les relations de 3.(b) s'écrivent colonne par colonne $MQ = QD$ (la j -ième colonne de QD est $\lambda_j Q_j$). En multipliant à droite par Q^{-1} :

Conclusion

Q est inversible et $M = QDQ^{-1}$ avec $D = \text{diag}\left(-\frac{1}{4}, \frac{5}{12}, 1, 0\right)$.

3. (d) On résout, pour $Y = {}^t(y_1, y_2, y_3, y_4)$ quelconque, le système $QX = Y$ d'inconnue $X = {}^t(x_1, x_2, x_3, x_4)$ par la méthode du pivot de Gauss :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & y_1 \quad (L_1) \\ -3x_1 + 5x_2 + 12x_3 & = & y_2 \quad (L_2) \\ 3x_1 - 3x_2 + 18x_3 - 3x_4 & = & y_3 \quad (L_3) \\ -x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 & = & y_4 \quad (L_4) \end{array} \right.$$

Élimination de x_1 ($L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1, L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1, L_4 \leftarrow L_4 + L_1$) :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 8x_2 + 15x_3 + 3x_4 & = & 3y_1 + y_2 \quad (L'_2) \\ -6x_2 + 15x_3 - 6x_4 & = & -3y_1 + y_3 \quad (L'_3) \\ -2x_2 + 5x_3 + 3x_4 & = & y_1 + y_4 \quad (L'_4) \end{array} \right.$$

Élimination de x_2 à l'aide de L'_4 ($L'_2 \leftarrow L'_2 + 4L'_4, L'_3 \leftarrow L'_3 - 3L'_4$) :

$$35x_3 + 15x_4 = 7y_1 + y_2 + 4y_4 \quad \text{et} \quad -15x_4 = -6y_1 + y_3 - 3y_4$$

D'où successivement :

$$x_4 = \frac{6y_1 - y_3 + 3y_4}{15}$$

$$35x_3 = 7y_1 + y_2 + 4y_4 - (6y_1 - y_3 + 3y_4) = y_1 + y_2 + y_3 + y_4, \text{ donc } x_3 = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{35}$$

$$\begin{aligned} 2x_2 &= 5x_3 + 3x_4 - y_1 - y_4 = \frac{5(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) + 7(6y_1 - y_3 + 3y_4) - 35y_1 - 35y_4}{35} \\ &= \frac{12y_1 + 5y_2 - 2y_3 - 9y_4}{35}, \end{aligned}$$

$$\text{donc } x_2 = \frac{12y_1 + 5y_2 - 2y_3 - 9y_4}{70}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 - x_2 - x_3 - x_4 \\ &= \frac{210y_1 - (36y_1 + 15y_2 - 6y_3 - 27y_4) - (6y_1 + 6y_2 + 6y_3 + 6y_4) - (84y_1 - 14y_3 + 42y_4)}{210} \\ &= \frac{84y_1 - 21y_2 + 14y_3 - 21y_4}{210} \end{aligned}$$

Le système admet une unique solution $X = Q^{-1}Y$ pour tout Y .

Conclusion

$$Q^{-1} = \frac{1}{210} \begin{pmatrix} 84 & -21 & 14 & -21 \\ 36 & 15 & -6 & -27 \\ 6 & 6 & 6 & 6 \\ 84 & 0 & -14 & 42 \end{pmatrix}$$

Contrôle : la troisième ligne de Q^{-1} , $\frac{1}{35}(1, 1, 1, 1)$, multipliée par les colonnes de Q , donne $\frac{1}{35}(1 - 3 + 3 - 1) = 0$, $\frac{1}{35}(1 + 5 - 3 - 3) = 0$, $\frac{1}{35}(1 + 12 + 18 + 4) = 1$, $\frac{1}{35}(1 + 0 - 3 + 2) = 0$, ce qui est bien la troisième ligne de I_4 . Le produit $QQ^{-1} = I_4$ a également été vérifié numériquement.

4. (a) Par récurrence immédiate à partir de 1., $C_k = M^k C_0$ pour tout $k \geq 0$.

Méthode 1 — Calcul de M^k .

Par récurrence sur k , $M^k = QD^kQ^{-1}$: c'est vrai pour $k = 0$ ($I_4 = QQ^{-1}$) et, si

$M^k = QD^kQ^{-1}$, alors $M^{k+1} = QDQ^{-1}QD^kQ^{-1} = QD^{k+1}Q^{-1}$. Pour $k \geq 1$,
 $D^k = \text{diag} \left(\left(-\frac{1}{4}\right)^k, \left(\frac{5}{12}\right)^k, 1, 0 \right)$. On a

$$Q^{-1}C_0 = \text{deuxième colonne de } Q^{-1} = \frac{1}{210} \begin{pmatrix} -21 \\ 15 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{14} \\ \frac{1}{35} \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc $D^kQ^{-1}C_0 = {}^t \left(-\frac{1}{10} \left(-\frac{1}{4}\right)^k, \frac{1}{14} \left(\frac{5}{12}\right)^k, \frac{1}{35}, 0 \right)$, et $C_k = QD^kQ^{-1}C_0$.

Méthode 2 — Décomposition de C_0 dans la base de vecteurs propres.

Les coordonnées de C_0 dans la base (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) sont données par $Q^{-1}C_0$:

$C_0 = -\frac{1}{10}Q_1 + \frac{1}{14}Q_2 + \frac{1}{35}Q_3 + 0 \cdot Q_4$ (contrôle sur la première coordonnée :

$-\frac{1}{10} + \frac{1}{14} + \frac{1}{35} = \frac{-7+5+2}{70} = 0$). Comme $M^kQ_j = \lambda_j^kQ_j$, on obtient directement, pour $k \geq 1$,

$$C_k = M^kC_0 = -\frac{1}{10} \left(-\frac{1}{4}\right)^k Q_1 + \frac{1}{14} \left(\frac{5}{12}\right)^k Q_2 + \frac{1}{35}Q_3$$

La méthode 1 calcule toute la matrice M^k , utile pour une autre condition initiale ; la méthode 2 ne calcule que ce qui est nécessaire et fait apparaître le rôle de chaque valeur propre.

Conclusion

pour tout $k \geq 1$ (et aussi pour $k = 0$, la composante sur Q_4 étant nulle),

$$P(X_k = 0) = \frac{1}{35} - \frac{1}{10} \left(-\frac{1}{4}\right)^k + \frac{1}{14} \left(\frac{5}{12}\right)^k$$

$$P(X_k = 1) = \frac{12}{35} + \frac{3}{10} \left(-\frac{1}{4}\right)^k + \frac{5}{14} \left(\frac{5}{12}\right)^k$$

$$P(X_k = 2) = \frac{18}{35} - \frac{3}{10} \left(-\frac{1}{4}\right)^k - \frac{3}{14} \left(\frac{5}{12}\right)^k$$

$$P(X_k = 3) = \frac{4}{35} + \frac{1}{10} \left(-\frac{1}{4}\right)^k - \frac{3}{14} \left(\frac{5}{12}\right)^k$$

Vérification : pour $k = 1$, $P(X_1 = 0) = \frac{1}{35} + \frac{1}{40} + \frac{5}{168} = \frac{24 + 21 + 25}{840} = \frac{1}{12}$,

conforme à I.B.1 ($\frac{bs}{(b+n)(r+s)} = \frac{1}{12}$). Ces formules ont aussi été contrôlées numériquement en comparant avec $M^k C_0$ pour plusieurs valeurs de k .

4. (b) Comme $\left|-\frac{1}{4}\right| < 1$ et $\left|\frac{5}{12}\right| < 1$, les suites géométriques $\left(\left(-\frac{1}{4}\right)^k\right)$ et $\left(\left(\frac{5}{12}\right)^k\right)$ tendent vers 0. Par opérations sur les limites :

Conclusion

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} P(X_k = 0) = \frac{1}{35}, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} P(X_k = 1) = \frac{12}{35}, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} P(X_k = 2) = \frac{18}{35},$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} P(X_k = 3) = \frac{4}{35}$$

Ces limites ont pour somme 1 et forment le vecteur propre $\frac{1}{35}Q_3$ de M pour la valeur propre 1. Interprétation : il y a en tout 7 boules, dont 4 blanches et 3 noires ; la limite de $P(X_k = \ell)$ est la proportion des $\binom{7}{3} = 35$ parties à 3 éléments de l'ensemble des 7 boules qui contiennent exactement ℓ blanches, soit

$$\frac{\binom{4}{\ell} \binom{3}{3-\ell}}{35} :$$

à long terme, le contenu de U_1 est comme un tirage de 3 boules au hasard parmi les 7.

Relevé des adaptations

Exercice 1, question 2.(b) : la condition « $-1 < x - \text{abs}h$ » du document source est écrite $-1 < x - |h|$ (rectification d'une coquille typographique sans incidence mathématique). Dans le corrigé, la dérivabilité de F est établie uniquement par les majorations de 2.(b), sans théorème de dérivation sous l'intégrale.

Exercice 2 : l'énoncé adapté explicite les hypothèses $0 < p < 1$ et l'indépendance mutuelle des perceptions des différents spots pour un même téléspectateur, implicites dans le sujet d'origine et nécessaires pour obtenir la loi binomiale.

Problème, Partie I.A, question 3.(a) : Code adapté en Python. La demande « écrire l'algorithme » est remplacée par l'écriture d'une fonction Python $\text{loi}(k)$ renvoyant (u_k, v_k, w_k) , conformément au référentiel informatique.

Problème, Partie I.B : la valeur $X_0 = b$, implicite dans l'énoncé (composition initiale, cohérente avec $X_0 = 1$ au A et avec C_0 en Partie II), est utilisée dans le corrigé sans modification du sujet.

Points restant à vérifier

Exercice 2, question 2 : la valeur numérique de n dépend des constantes a, b, p , non fournies par l'énoncé ; la réponse est donc donnée sous forme littérale. La compatibilité de cette valeur avec la contrainte implicite $an + bn^2 \leq 1$ ne peut pas être vérifiée sans valeurs numériques.