



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

Ecricome

Mathématiques

1990

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

EXERCICE 1

On note E_2 l'espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$, constitué de la fonction nulle et des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2.

1. (a) Déterminer les réels $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ tels que, pour toute fonction $P \in E_2$:

$$\int_0^1 P(t) e^t dt = \lambda_0 P(0) + \lambda_1 P\left(\frac{1}{2}\right) + \lambda_2 P(1).$$

- (b) On note θ la fonction numérique définie par $\theta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \ln(1 + t)$.

Montrer qu'il existe une unique fonction $P_\theta \in E_2$, à déterminer, telle que $P_\theta(x) = \theta(x)$ pour $x = 0, x = \frac{1}{2}$ et $x = 1$.

- (c) On pose :

$$I = \int_0^1 \ln(1 + t) e^t dt \quad \text{et} \quad I^* = \int_0^1 P_\theta(t) e^t dt.$$

Calculer I^* , considéré comme valeur approchée de I .

2. Soit $\alpha \in]0, 1[\setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$. On considère la fonction δ_α définie sur $[0, 1]$ par :

$$\delta_\alpha(t) = \ln(1 + t) - P_\theta(t) - \frac{t \left(t - \frac{1}{2} \right) (t - 1)}{\alpha \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) (\alpha - 1)} [\ln(1 + \alpha) - P_\theta(\alpha)].$$

Constater que δ_α s'annule en quatre points distincts de $[0, 1]$.

En déduire, par application du théorème de Rolle, qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que $\delta_\alpha^{(3)}(c) = 0$, où $\delta_\alpha^{(3)}$ désigne la dérivée troisième de δ_α , puis que :

$$\ln(1 + \alpha) - P_\theta(\alpha) = \frac{\alpha \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) (\alpha - 1)}{6} \cdot \frac{2}{(1 + c)^3}.$$

Montrer alors, après avoir étudié les variations de la fonction $\Delta : t \mapsto t \left(t - \frac{1}{2} \right) (t - 1)$ sur $[0, 1]$, que :

$$\forall t \in [0, 1], \quad |\ln(1 + t) - P_\theta(t)| \leq \frac{1}{36\sqrt{3}}.$$

En déduire que $|I - I^*| < 3 \cdot 10^{-2}$.

EXERCICE 2

Les ventes de mini-ordinateurs de jeux, réalisées au cours des fêtes de fin d'année, ont été observées dans un magasin X et ont donné les relevés suivants :

Année t_j	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988
Unités vendues n_j (arrondies)	275	400	450	525	550	525	500

On pose :

$$x_i = t_i - 1985 \quad \text{et} \quad y_i = \frac{n_i - 400}{25}, \quad \text{avec } i \text{ variant de } -3 \text{ à } +3.$$

I. (1) Déterminer la droite de régression de y en x .

On rappelle que la droite de régression de y en x est la droite d'équation $y = ax + b$, où (a, b) est l'unique couple de réels qui rend minimale la quantité

$$F(a, b) = \sum_{i=-3}^3 (y_i - ax_i - b)^2.$$

On admet que $a = \frac{s_{xy}}{s_x^2}$ et $b = \bar{y} - a\bar{x}$, où

$$\bar{x} = \frac{1}{7} \sum_{i=-3}^3 x_i$$

et

$$\bar{y} = \frac{1}{7} \sum_{i=-3}^3 y_i$$

sont les moyennes,

$$s_x^2 = \frac{1}{7} \sum_{i=-3}^3 (x_i - \bar{x})^2$$

la variance et

$$s_{xy} = \frac{1}{7} \sum_{i=-3}^3 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

la covariance empiriques de la série.

(2) Représenter sur un même graphe le nuage de points (x_i, y_i) et la droite déterminée en I.(1).

II. (1) Soit p un entier naturel non nul. On considère les fonctions polynomiales définies par :

$$P_0(x) = 1 ; \quad P_1(x) = x ; \quad P_2(x) = x^2 - \frac{p^2 + p}{3}.$$

Montrer que pour tout couple $(k, l) \in \{(0, 1), (0, 2), (1, 2)\}$, on a :

$$\sum_{i=-p}^p P_k(i) P_l(i) = 0.$$

On rappelle que, pour tout entier $p \geq 1$,

$$\sum_{i=1}^p i^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}.$$

(2) On se propose de rechercher une fonction polynomiale de degré 2 ajustant au mieux le relevé statistique (x_i, y_i) obtenu en introduction.

Reprenant les notations de II.(1), avec $p = 3$, on note cette fonction sous la forme :

$$P(x) = \alpha P_0(x) + \beta P_1(x) + \gamma P_2(x)$$

et on choisit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ de façon à rendre minimale la quantité :

$$A = \sum_{i=-3}^3 [y_i - P(x_i)]^2.$$

a) On suppose β et γ fixés arbitrairement : A peut alors être considérée comme une fonction de α . Montrer que la valeur de α rendant minimale A est :

$$\alpha_0 = \frac{\sum_{i=-3}^3 P_0(i) y_i}{\sum_{i=-3}^3 (P_0(i))^2}.$$

- b)** On suppose désormais $\alpha = \alpha_0$ et γ fixé. Quelle valeur β_0 de β rend A minimale ?
- c)** Enfin, pour $\alpha = \alpha_0$ et $\beta = \beta_0$, quelle valeur γ_0 de γ rend A minimale ?
- d)** Préciser les valeurs numériques de $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ et représenter sur le graphique du I.(2) la fonction d'ajustement :

$$P = \alpha_0 P_0 + \beta_0 P_1 + \gamma_0 P_2.$$

PROBLÈME

Un article A est commercialisé sous trois présentations différentes. Le problème étudie une suite aléatoire d'achats de cet article et la probabilité que, pour l'une des trois présentations, qui sera, par la suite, appelée présentation P, la fréquence des choix s'étant portés sur elle soit exactement $\frac{1}{3}$.

Première partie — A

On considérera qu'un acheteur de l'article A ne se porte acquéreur que d'un seul article, que les achats sont indépendants entre eux et que le choix d'un client se porte sur la présentation P avec une probabilité p .

- 1.** On observe une suite de $3n$ achats, n désignant un entier naturel non nul.

Quelle est la probabilité p_n pour que la fréquence observée de choix de la présentation P soit égale à $\frac{1}{3}$?

2. On observe une succession d'achats de l'article A et on note q_n la probabilité pour que, avec le $(3n)$ -ième achat, on obtienne pour la première fois la fréquence $\frac{1}{3}$ attendue.

(a) Montrer que :

$$p_1 = q_1 \quad \text{et} \quad p_2 = q_1 p_1 + q_2.$$

(b) Établir que, pour tout entier $n \geq 2$:

$$p_n = \sum_{k=1}^{n-1} q_k p_{n-k} + q_n.$$

(c) Montrer que, pour tout $n \geq 2$:

$$\sum_{k=1}^n (p_k - q_k) = \sum_{(i,j) \in E_n} p_i q_j,$$

la dernière somme étant étendue à tous les couples (i, j) de l'ensemble :

$$E_n = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \text{ tel que } i \geq 1, j \geq 1, 2 \leq i + j \leq n\}.$$

Justifier que, pour tout $n \geq 2$:

$$\sum_{(i,j) \in E_n} p_i q_j \leq \left(\sum_{i=1}^n p_i \right) \left(\sum_{j=1}^n q_j \right).$$

En déduire :

$$\sum_{k=1}^n (p_k - q_k) \leq \left(\sum_{i=1}^n p_i \right) \left(\sum_{j=1}^n q_j \right) \leq \sum_{k=1}^{2n} (p_k - q_k).$$

3. (a) De quel événement le réel $Q_n = q_1 + q_2 + \dots + q_n$, où $n \geq 1$, est-il la probabilité ?

(b) Montrer que la série

$$\sum_{n \geq 1} q_n$$

est convergente.

(c) Établir, à l'aide du 2.(c), que lorsque la série

$$\sum_{n \geq 1} p_n$$

est convergente de somme S , on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n = \frac{S}{S+1}$.

Deuxième partie — B

1. On considère la série de terme général p_n défini pour $n \geq 1$ par :

$$p_n = \binom{3n}{n} [x(1-x)^2]^n$$

où x désigne un paramètre réel, élément du segment $[0, 1]$, et où $\binom{3n}{n}$ représente le coefficient binomial $\frac{(3n)!}{n!(2n)!}$.

(a) Montrer que, pour tout $n \geq 1$:

$$0 \leq \frac{\binom{3n+3}{n+1}}{\binom{3n}{n}} \leq \frac{3^3}{2^2}.$$

(b) En déduire que, pour tout $n \geq 1$:

$$0 \leq p_n \leq \left[\frac{3^3}{2^2} x(1-x)^2 \right]^{n-1} p_1.$$

(c) Étudier les variations de la fonction $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{3^3}{2^2} x(1-x)^2$, et justifier la convergence de la série

$$\sum p_n$$

lorsque $x \neq \frac{1}{3}$.

(d) On suppose dans cette question $x = \frac{1}{10}$. Déterminer un majorant de

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} p_k.$$

Choisissant comme valeur approchée de

$$S = \sum_{k=1}^{+\infty} p_k$$

une somme partielle

$$s_n = \sum_{k=1}^n p_k,$$

quelle valeur de n peut-on choisir pour que l'erreur commise soit inférieure à 10^{-2} ?

Calculer cette valeur approchée.

En déduire une valeur approchée de $l = \frac{S}{S+1}$.

2. On suppose $x = \frac{1}{3}$ dans cette question, où l'on étudie la nature de la série

$$\sum p_n.$$

(a) Déterminer un développement limité quand n tend vers $+\infty$ de $\frac{p_{n+1}}{p_n}$ de la forme :

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = 1 + \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

(b) On pose, pour $n \geq 1$, $v_n = \frac{1}{n}$.

Après avoir déterminé un développement limité de $\frac{v_{n+1}}{v_n}$, quand n tend vers $+\infty$, analogue au précédent, montrer qu'il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$:

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} \geq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

(c) Quelle est la nature de la série

$$\sum p_n$$

?