



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ECRICOME — 1989

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

EXERCICE DE MATHÉMATIQUES

Dans tout l'exercice, on note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = \frac{1}{\sqrt{4+t^4}}$.

Pour tout réel t , on a $4+t^4 \geq 4 > 0$: g est bien définie, continue (et même de classe C^∞) sur $\mathbb{R}$, et strictement positive. De plus g est paire.

1. Ensemble de définition de F .

Il s'agit de vérifier que l'intégrale $\int_x^{2x} g(t) dt$ a un sens pour tout réel x .

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, le segment d'extrémités x et $2x$ est contenu dans $\mathbb{R}$, sur lequel g est continue. L'intégrale d'une fonction continue sur un segment est bien définie.

Conclusion

F est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Imparité de F .

$\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 ; il faut montrer que $F(-x) = -F(x)$ pour tout réel x .

Méthode 1 — Changement de variable affine.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $F(-x) = \int_{-x}^{-2x} g(t) dt$. On effectue le changement de variable affine $t = -u$ (de classe C^1), $dt = -du$; quand t va de $-x$ à $-2x$, u va de x à $2x$:

$$F(-x) = \int_x^{2x} g(-u) (-du) = - \int_x^{2x} g(u) du = -F(x)$$

car g est paire.

Méthode 2 — Par la dérivée (en utilisant la question 3, établie indépendamment).

D'après la question 3, F est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $F'(x) = 2g(2x) - g(x)$. Comme g est paire, F' est paire. Posons $\psi(x) = F(x) + F(-x)$: ψ est dérivable sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et $\psi'(x) = F'(x) - F'(-x) = 0$. Donc ψ est constante, égale à $\psi(0) = 2F(0) = 0$ (intégrale sur un segment réduit à un point).

La méthode 1 est la plus directe ; la méthode 2 illustre un réflexe utile pour une fonction définie par une intégrale dont les bornes dépendent de x : étudier sa dérivée.

Conclusion

F est impaire.

3. Dérivabilité de F et calcul de $F'(x)$.

La fonction g étant continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$, elle admet une primitive G sur $\mathbb{R}$ (théorème fondamental du calcul intégral), de classe C^1 avec $G' = g$. Pour tout réel x :

$$F(x) = G(2x) - G(x).$$

Les fonctions $x \mapsto 2x$ et G sont dérivables sur $\mathbb{R}$, donc par composition et différence F est dérivable sur $\mathbb{R}$, et :

$$F'(x) = 2G'(2x) - G'(x) = 2g(2x) - g(x) = \frac{2}{\sqrt{4 + 16x^4}} - \frac{1}{\sqrt{4 + x^4}}.$$

Comme $\sqrt{4 + 16x^4} = 2\sqrt{1 + 4x^4}$, on obtient :

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4x^4}} - \frac{1}{\sqrt{4 + x^4}}.$$

Conclusion

F est dérivable sur $\mathbb{R}$ (et même de classe C^1 car F' est continue) et, pour tout réel x ,

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+4x^4}} - \frac{1}{\sqrt{4+x^4}}.$$

4. Encadrement de $F(x)$ pour $x \geq 0$, puis limite en $+\infty$.

On encadre g sur $[x, 2x]$ puis on intègre, ce qui est licite car les bornes sont dans l'ordre croissant.

Soit $x \geq 0$ et $t \in [x, 2x]$. Alors $0 \leq x \leq t \leq 2x$, d'où, par croissance de $u \mapsto u^4$ sur $\mathbb{R}_+$, $x^4 \leq t^4 \leq 16x^4$, puis :

$$4 + x^4 \leq 4 + t^4 \leq 4 + 16x^4.$$

Ces trois quantités étant strictement positives, la croissance de la racine carrée puis la décroissance de $u \mapsto 1/u$ sur $]0, +\infty[$ donnent :

$$\frac{1}{\sqrt{4+16x^4}} \leq g(t) \leq \frac{1}{\sqrt{4+x^4}}.$$

Comme $x \leq 2x$, la croissance de l'intégrale fournit, le segment $[x, 2x]$ étant de longueur x :

$$\frac{x}{\sqrt{4+16x^4}} \leq F(x) \leq \frac{x}{\sqrt{4+x^4}}.$$

Limite en $+\infty$: pour $x > 0$, $\frac{x}{\sqrt{4+x^4}} = \frac{x}{x^2 \sqrt{1+4/x^4}} = \frac{1}{x \sqrt{1+4/x^4}}$, qui tend vers 0 quand $x \rightarrow +\infty$. Le minorant est positif. Par encadrement, $F(x) \rightarrow 0$.

Conclusion

pour tout $x \geq 0$, l'encadrement demandé est vrai, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$. Par imparité, on a aussi $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$.

5. Tableau de variations de F .

On étudie le signe de $F'(x)$. Les deux racines carrées étant strictement positives :

$$\begin{aligned} F'(x) \geq 0 &\Leftrightarrow \sqrt{4+x^4} \geq \sqrt{1+4x^4} \Leftrightarrow 4+x^4 \geq 1+4x^4 \Leftrightarrow 3 \geq 3x^4 \Leftrightarrow x^4 \leq 1 \\ &\Leftrightarrow |x| \leq 1. \end{aligned}$$

On obtient de même, avec des inégalités strictes, $F'(x) > 0 \Leftrightarrow |x| < 1$; et $F'(x) = 0 \Leftrightarrow |x| = 1$.

Donc F est strictement décroissante sur $] -\infty, -1]$, strictement croissante sur $[-1, 1]$, strictement décroissante sur $[1, +\infty[$.

Valeurs remarquables : $F(0) = 0$; $F'(0) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$; $F(-1) = -F(1)$ par imparité ;

$F(1) = \int_1^2 g(t) dt > 0$ (intégrale d'une fonction continue strictement positive, bornes dans l'ordre croissant). Les limites en $\pm\infty$ sont nulles (question 4).

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$F'(x)$		$-$	0	$+$	$\frac{1}{2}$	$+$	0	$-$	
$F(x)$	0	décroissante	$-F(1)$	croissante	0	croissante	$F(1)$	décroissante	0

Conclusion

F admet un maximum global $F(1)$ atteint en 1 et un minimum global $-F(1)$ atteint en -1 ; en effet sur $[1, +\infty[$, F décroît vers 0 donc $0 < F(x) \leq F(1)$, et sur $] -\infty, 1]$ les variations montrent $F(x) \leq F(1)$ (avec $F \leq 0$ sur $] -\infty, 0]$). Le cas du minimum s'en déduit par imparité.

6. Valeur approchée de $F(1)$ à 10^{-1} près.

On a $F(1) = \int_1^2 g(t) dt$. L'idée est d'exploiter la monotonie de g sur $[1, 2]$ pour encadrer l'intégrale par des aires de rectangles.

Sur $[1, 2]$, $t \mapsto 4 + t^4$ est strictement croissante et strictement positive, donc g est strictement décroissante. Si $[c, d] \subset [1, 2]$ avec $c < d$, on a $g(d) \leq g(t) \leq g(c)$ pour $t \in [c, d]$, d'où par croissance de l'intégrale :

$$(d - c) g(d) \leq \int_c^d g(t) dt \leq (d - c) g(c).$$

Méthode 1 — Rectangles à la main avec deux sous-intervalles.

On découpe $[1, 2] = [1, \frac{3}{2}] \cup [\frac{3}{2}, 2]$ et on applique ce qui précède sur chaque morceau, puis la relation de Chasles :

$$\frac{1}{2} \left[g\left(\frac{3}{2}\right) + g(2) \right] \leq F(1) \leq \frac{1}{2} \left[g(1) + g\left(\frac{3}{2}\right) \right].$$

Calculs intermédiaires :

$$g(1) = \frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0,44721; \quad g\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{4 + \frac{81}{16}}} = \frac{4}{\sqrt{145}} \approx 0,33218;$$

$$g(2) = \frac{1}{\sqrt{20}} \approx 0,22361.$$

D'où, en arrondissant le minorant par défaut et le majorant par excès :

$$0,2778 \leq F(1) \leq 0,3897.$$

L'amplitude de cet encadrement est $\frac{1}{2} [g(1) - g(2)] \approx 0,1118$. Son centre

$$m = \frac{1}{4} \left[g(1) + 2g\left(\frac{3}{2}\right) + g(2) \right] \approx 0,3338 \text{ vérifie donc } |F(1) - m| \leq 0,056 < 10^{-1}.$$

Remarque : avec un seul rectangle (encadrement de la question 4 pour $x = 1$), on obtient $0,2236 \leq F(1) \leq 0,4473$, dont la demi-amplitude $0,112$ dépasse 10^{-1} : c'est pourquoi on a coupé l'intervalle en deux.

Méthode 2 — Méthode des rectangles programmée en Python.

On généralise : on subdivise $[1, 2]$ en n intervalles de longueur $h = \frac{1}{n}$, de points $t_j = 1 + jh$ pour $0 \leq j \leq n$. Par décroissance de g et la relation de Chasles :

$$h \sum_{j=1}^n g(t_j) \leq F(1) \leq h \sum_{j=0}^{n-1} g(t_j).$$

La différence entre majorant et minorant vaut $h [g(t_0) - g(t_n)] = \frac{g(1) - g(2)}{n} \leq \frac{0,224}{n}$;
le centre de l'encadrement approche donc $F(1)$ à $\frac{0,112}{n}$ près.

Python

```
import numpy as np

def g(t):
    return 1 / np.sqrt(4 + t**4)

def encadrement(n):
    h = 1 / n
    t = 1 + h * np.arange(n + 1)      # points t_0, ..., t_n de [1, 2]
    v = g(t)
    minorant = h * np.sum(v[1:n+1])    # rectangles à droite (g décroissante)
    majorant = h * np.sum(v[0:n])      # rectangles à gauche
    return minorant, majorant
```

```
m1, m2 = encadrement(100)
print(m1, m2, (m1 + m2) / 2)
```

Ce code a été exécuté ; il affiche environ 0,332629, 0,334865 et 0,333747. Ainsi $0,3326 \leq F(1) \leq 0,3349$. Le tableau numpy v contient les valeurs $g(t_0), \dots, g(t_n)$; la tranche $v[1:n+1]$ correspond aux indices 1 à n (borne supérieure exclue), et $v[0:n]$ aux indices 0 à $n-1$.

La méthode 1 se fait à la main et suffit pour la précision demandée ; la méthode 2 montre comment obtenir une précision arbitraire, le contrôle d'erreur restant une preuve exacte (seuls les calculs de $g(t_j)$ sont numériques).

Conclusion

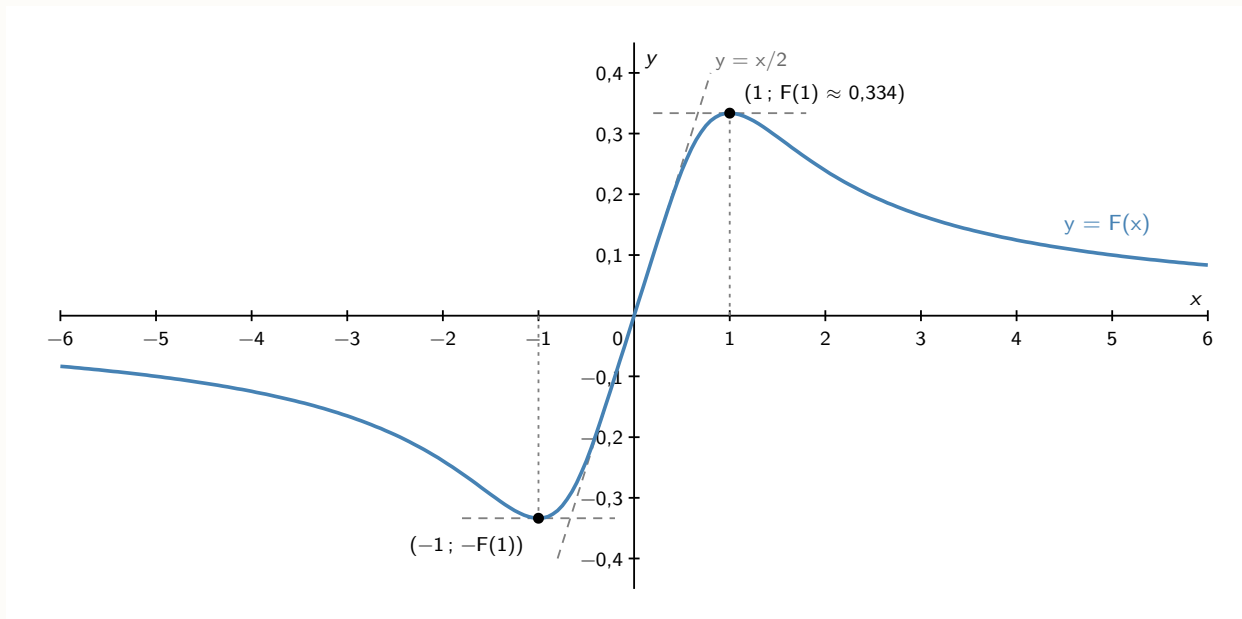
$F(1) \approx 0,33$ à 10^{-1} près (et même $F(1) \approx 0,334$ à $2 \cdot 10^{-3}$ près).

7. Courbe représentative de F .

Récapitulons les éléments utiles au tracé, établis plus haut :

- F est impaire : la courbe est symétrique par rapport à l'origine.
- La tangente à l'origine a pour pente $F'(0) = \frac{1}{2}$: c'est la droite d'équation $y = \frac{x}{2}$.
- Les tangentes aux points d'abscisses 1 et -1 sont horizontales ($F'(\pm 1) = 0$), avec $F(1) \approx 0,334$.
- L'axe des abscisses est asymptote en $+\infty$ et en $-\infty$; d'après la question 8, $F(x) \sim \frac{1}{2x}$ en $\pm\infty$, et $F > 0$ sur $]0, +\infty[$, $F < 0$ sur $] -\infty, 0[$.

La courbe ci-dessous a été calculée par intégration numérique de g (méthode de Simpson) en 241 points de $[-6, 6]$.



Conclusion

la courbe passe par l'origine avec la pente $\frac{1}{2}$, monte jusqu'au maximum $(1; F(1))$, puis redescend vers l'asymptote $y = 0$; la partie $x < 0$ s'obtient par symétrie centrale.

8. Limite de H en $+\infty$ et équivalent de F .

On compare $g(t)$ à $\frac{1}{t^2}$ pour t grand, en majorant explicitement leur différence. Pour $x > 0$, la fonction $t \mapsto g(t) - \frac{1}{t^2}$ est continue sur $[x, 2x] \subset]0, +\infty[$, donc $H(x)$ est bien défini.

Majoration de la différence. Soit $t > 0$. En multipliant par la quantité conjuguée :

$$\frac{1}{t^2} - \frac{1}{\sqrt{4+t^4}} = \frac{\sqrt{4+t^4} - t^2}{t^2 \sqrt{4+t^4}} = \frac{(4+t^4) - t^4}{t^2 \sqrt{4+t^4} (\sqrt{4+t^4} + t^2)} = \frac{4}{t^2 \sqrt{4+t^4} (\sqrt{4+t^4} + t^2)}.$$

Comme $\sqrt{4+t^4} \geq \sqrt{t^4} = t^2 > 0$, on a $\sqrt{4+t^4} + t^2 \geq 2t^2$, d'où :

$$0 < \frac{1}{t^2} - g(t) \leq \frac{4}{t^2 \cdot t^2 \cdot 2t^2} = \frac{2}{t^6}.$$

Limite de H . Soit $x > 0$. Pour $t \in [x, 2x]$, $t \geq x > 0$ donc $\frac{2}{t^6} \leq \frac{2}{x^6}$. Par croissance de l'intégrale (bornes dans l'ordre croissant) :

$$0 \leq -H(x) = x \int_x^{2x} \left[\frac{1}{t^2} - g(t) \right] dt \leq x \cdot x \cdot \frac{2}{x^6} = \frac{2}{x^4}.$$

Comme $\frac{2}{x^4} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$, le théorème d'encadrement donne $\lim_{x \rightarrow +\infty} H(x) = 0$.

Équivalent de F . Pour $x > 0$, par linéarité :

$$H(x) = x \left[F(x) - \int_x^{2x} \frac{dt}{t^2} \right] = x \left[F(x) - \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x} \right) \right] = xF(x) - \frac{1}{2}.$$

Donc $2xF(x) = 1 + 2H(x) \rightarrow 1$ quand $x \rightarrow +\infty$, c'est-à-dire $\frac{F(x)}{1/(2x)} \rightarrow 1$.

Conclusion

$\lim_{x \rightarrow +\infty} H(x) = 0$ et $F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$. Par imparité, cet équivalent reste valable en $-\infty$.

EXERCICE DE PROBABILITÉS-STATISTIQUES

Le contexte impose implicitement $a > 0$ (prix d'achat) et $b > 0$ (bénéfice par unité vendue) : chaque unité vendue rapporte $a + b$ francs. Les p_k vérifient $p_k > 0$ pour tout k et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 1.$$

1. (a) Gain en fonction du nombre k de demandes.

Le commerçant achète N unités pour un coût aN et vend $\min(k, N)$ unités, chacune au prix $a + b$.

- Si $k \leq N$, il vend k unités : gain $(a + b)k - aN$.
- Si $k \geq N$, il vend ses N unités : gain $(a + b)N - aN = bN$.

Les deux expressions coïncident pour $k = N$.

Conclusion

le gain vaut $(a + b) \min(k, N) - aN$. Le gain aléatoire est donc $G_N = (a + b) \min(X, N) - aN$.

(b) Espérance E_N du gain.

La variable $\min(X, N)$ prend ses valeurs dans l'ensemble fini $\{0, \dots, N\}$, donc G_N est une variable aléatoire finie : son espérance existe. Par le théorème de transfert :

$$E_N = \sum_{k=0}^{N-1} [(a + b)k - aN] p_k + bN P(X \geq N).$$

Comme

$$P(X \geq N) = 1 - \sum_{k=0}^{N-1} p_k,$$

on regroupe :

$$E_N = bN + \sum_{k=0}^{N-1} [(a + b)k - aN - bN] p_k = bN - (a + b) \sum_{k=0}^{N-1} (N - k) p_k.$$

Conclusion

$$E_N = bN - (a + b) \sum_{k=0}^{N-1} (N - k) p_k$$

(somme vide nulle pour $N = 0$, d'où $E_0 = 0$).

2. (a) Calcul de $E_{N+1} - E_N$.

Méthode 1 — À partir de la formule de 1.(b).

D'après 1.(b) :

$$E_{N+1} - E_N = b - (a + b) \left[\sum_{k=0}^N (N + 1 - k) p_k - \sum_{k=0}^{N-1} (N - k) p_k \right].$$

Le terme d'indice $k = N$ de la somme

$$\sum_{k=0}^N (N - k) p_k$$

est nul, donc on peut étendre la seconde somme jusqu'à $k = N$:

$$E_{N+1} - E_N = b - (a + b) \sum_{k=0}^N [(N + 1 - k) - (N - k)] p_k = b - (a + b) \sum_{k=0}^N p_k.$$

Méthode 2 — Par différence des variables aléatoires.

Pour tout entier k , $\min(k, N + 1) - \min(k, N)$ vaut 1 si $k \geq N + 1$ et 0 sinon. Donc :

$$G_{N+1} - G_N = (a + b) \mathbf{1}_{[X \geq N+1]} - a.$$

Par linéarité de l'espérance (variables finies) et puisque

$$E(\mathbf{1}_{[X \geq N+1]}) = P(X \geq N+1) = 1 - \sum_{k=0}^N p_k :$$

$$E_{N+1} - E_N = (a + b) \left(1 - \sum_{k=0}^N p_k \right) - a = b - (a + b) \sum_{k=0}^N p_k.$$

La méthode 1 est un calcul de sommes ; la méthode 2, plus économique, interprète la différence : la $(N + 1)$ -ième unité achetée coûte a et rapporte $a + b$ seulement si elle est demandée, c'est-à-dire si $X \geq N + 1$.

Conclusion

$$E_{N+1} - E_N = b - (a + b) \sum_{k=0}^N p_k.$$

(b) Conditions de croissance et de décroissance.

Posons

$$\Phi(N) = \sum_{k=0}^N p_k = P(X \leq N)$$

et $\beta = \frac{b}{a+b}$. Comme $a > 0$ et $b > 0$, $0 < \beta < 1$. Puisque $a + b > 0$:

$$E_{N+1} - E_N = (a + b) [\beta - \Phi(N)].$$

Donc $E_{N+1} \geq E_N \iff \Phi(N) \leq \beta$, et $E_{N+1} < E_N \iff \Phi(N) > \beta$.

Propriétés de Φ : comme $p_{N+1} > 0$, $\Phi(N+1) > \Phi(N)$: Φ est strictement croissante. De plus

$$\Phi(N) \rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 1 > \beta$$

quand $N \rightarrow +\infty$. L'ensemble $\{N \in \mathbb{N} : \Phi(N) > \beta\}$ est donc non vide (définition de la limite avec $\varepsilon = 1 - \beta > 0$) ; c'est une partie non vide de $\mathbb{N}$, elle admet un plus petit élément noté N^* .

- Pour $N < N^*$: $\Phi(N) \leq \beta$ par définition de N^* , donc $E_{N+1} \geq E_N$.
- Pour $N \geq N^*$: $\Phi(N) \geq \Phi(N^*) > \beta$ par croissance, donc $E_{N+1} < E_N$.

Conclusion

la suite (E_N) est croissante tant que

$$\sum_{k=0}^N p_k \leq \frac{b}{a+b},$$

c'est-à-dire sur $\{0, \dots, N^*\}$, puis strictement décroissante à partir du rang N^* , dès que

$$\sum_{k=0}^N p_k > \frac{b}{a+b}.$$

(c) Bénéfice optimal.

D'après (b), $E_0 \leq E_1 \leq \dots \leq E_{N^*}$ et $E_{N^*} > E_{N^*+1} > E_{N^*+2} > \dots$. Donc $E_{N^*} \geq E_N$ pour tout $N \in \mathbb{N}$: l'espérance de gain est maximale pour $N = N^*$.

Par construction, N^* est le plus petit entier N tel que

$$\sum_{k=0}^N p_k > \frac{b}{a+b},$$

ce qui équivaut, d'après (a), à $E_{N+1} - E_N < 0$.

Remarque : comme Φ est strictement croissante, l'égalité $\Phi(N) = \beta$ a lieu pour au plus une valeur de N , nécessairement $N = N^* - 1$; dans ce cas $E_{N^*-1} = E_{N^*}$ et les deux choix sont optimaux. Dans tous les cas N^* réalise le maximum.

Conclusion

le nombre optimal d'unités à acheter est $S = N^*$, plus petite valeur de N telle que $E_{N+1} - E_N < 0$, ou encore telle que

$$\sum_{k=0}^N p_k > \frac{b}{a+b}.$$

PROBLÈME

Première partie - A

Pour $m \geq 1$, $I(0, m)$ est le nombre de permutations des m éléments sans point fixe (aucun élément à sa place initiale) ; la convention $I(0, 0) = 1$ correspond à l'unique permutation de l'ensemble vide.

1. (a) Montrer que $I(k, n) = C_n^k I(0, n - k)$.

On construit les permutations ayant exactement k points fixes en deux choix successifs.

Soit $0 \leq k \leq n$ avec $n \geq 1$. Une permutation σ ayant exactement k points fixes est entièrement déterminée par :

- l'ensemble A de ses k points fixes, qui est une partie à k éléments de l'ensemble des n positions : C_n^k choix ;
- sa restriction aux $n - k$ éléments restants, qui est une permutation de ces $n - k$ éléments sans point fixe (sinon σ aurait plus de k points fixes) : $I(0, n - k)$ choix lorsque $n - k \geq 1$. Si $k = n$, la seule possibilité est l'identité et $I(0, 0) = 1$ convient.

Réciproquement, toute partie A à k éléments et toute permutation sans point fixe du complémentaire de A définissent une permutation (identité sur A) ayant exactement k points fixes, et deux couples différents donnent deux permutations différentes. Le principe multiplicatif donne le résultat.

Conclusion

$$I(k, n) = C_n^k I(0, n - k) \text{ pour } 0 \leq k \leq n.$$

(b) Relation (1).

Chacune des $n!$ permutations des n éléments a un nombre de points fixes compris entre 0 et n , et un seul. On partitionne donc l'ensemble des permutations selon ce nombre :

$$n! = \sum_{k=0}^n I(k, n) = \sum_{k=0}^n C_n^k I(0, n - k).$$

On effectue le changement d'indice $j = n - k$ et on utilise $C_n^{n-j} = C_n^j$:

$$n! = \sum_{j=0}^n C_n^j I(0, j).$$

Pour $n = 0$, la relation s'écrit $C_0^0 I(0, 0) = 1 = 0!$: elle est vraie par convention.

Conclusion

pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n C_n^k I(0, k) = n!.$$

2. (a) Identité binomiale puis somme alternée.

Question rectifiée (l'énoncé original comporte des indices incohérents, voir le relevé des adaptations).

Méthode 1 — Calcul avec les factorielles.

Pour $0 \leq k \leq i \leq n$:

$$C_i^k C_n^i = \frac{i!}{k! (i-k)!} \cdot \frac{n!}{i! (n-i)!} = \frac{n!}{k! (i-k)! (n-i)!}$$

et, puisque $0 \leq i-k \leq n-k$:

$$C_n^k C_{n-k}^{i-k} = \frac{n!}{k! (n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{(i-k)! (n-i)!} = \frac{n!}{k! (i-k)! (n-i)!}.$$

Méthode 2 — Double dénombrement.

On compte les couples (B, A) de parties d'un ensemble E à n éléments telles que $A \subset B$, $\text{Card } A = k$, $\text{Card } B = i$. En choisissant d'abord B (C_n^i choix) puis A dans B (C_i^k choix), on obtient $C_n^i C_i^k$. En choisissant d'abord A (C_n^k choix) puis les $i-k$ éléments de $B \setminus A$ parmi les $n-k$ éléments de $E \setminus A$ (C_{n-k}^{i-k} choix), on obtient $C_n^k C_{n-k}^{i-k}$.

Le calcul est immédiat ; le dénombrement explique d'où vient l'identité et se retient mieux.

Somme alternée. Soit $0 \leq k < n$. D'après l'identité, puis avec $j = i - k$ et la formule du binôme :

$$\begin{aligned} \sum_{i=k}^n (-1)^i C_i^k C_n^i &= C_n^k \sum_{i=k}^n (-1)^i C_{n-k}^{i-k} = (-1)^k C_n^k \sum_{j=0}^{n-k} C_{n-k}^j (-1)^j 1^{n-k-j} \\ &= (-1)^k C_n^k (1-1)^{n-k} = 0 \end{aligned}$$

car $n - k \geq 1$.

Remarque : pour $k = n$, la somme se réduit au terme $i = n$ et vaut $(-1)^n \neq 0$; ce cas interviendra en (b).

Conclusion

$$C_i^k C_n^i = C_n^k C_{n-k}^{i-k} \text{ pour } 0 \leq k \leq i \leq n, \text{ et}$$

$$\sum_{i=k}^n (-1)^i C_i^k C_n^i = 0$$

$$\text{pour } 0 \leq k < n.$$

(b) Calcul de $I(0, p)$.

On « inverse » le système triangulaire formé par les relations (1) écrites pour $n = 0, 1, \dots, p$, en les combinant avec les coefficients $(-1)^i C_p^i$.

Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour chaque $i \in \{0, \dots, p\}$, la relation (1) au rang i s'écrit

$$\sum_{k=0}^i C_i^k I(0, k) = i!.$$

On la multiplie par $(-1)^i C_p^i$ et on somme pour i de 0 à p :

$$\sum_{i=0}^p (-1)^i C_p^i i! = \sum_{i=0}^p \sum_{k=0}^i (-1)^i C_p^i C_i^k I(0, k).$$

Le membre de droite est une somme finie sur les couples (i, k) tels que $0 \leq k \leq i \leq p$; on peut intervertir l'ordre de sommation :

$$\sum_{k=0}^p I(0, k) \left[\sum_{i=k}^p (-1)^i C_i^k C_p^i \right].$$

D'après (a) appliqué avec $n = p$, le crochet est nul pour $k < p$; pour $k = p$, il vaut $(-1)^p C_p^p C_p^p = (-1)^p$. Donc le membre de droite vaut $(-1)^p I(0, p)$.

Membre de gauche : $C_p^i i! = \frac{p!}{(p-i)!}$, donc, avec $j = p - i$:

$$\sum_{i=0}^p (-1)^i \frac{p!}{(p-i)!} = p! \sum_{j=0}^p \frac{(-1)^{p-j}}{j!} = (-1)^p p! \sum_{j=0}^p \frac{(-1)^j}{j!}.$$

En égalant et en multipliant par $(-1)^p$:

$$I(0, p) = p! \sum_{i=0}^p \frac{(-1)^i}{i!}.$$

Vérification : $I(0, 0) = 1$, $I(0, 1) = 1 - 1 = 0$, $I(0, 2) = 2 \left(1 - 1 + \frac{1}{2} \right) = 1$,

$I(0, 3) = 6 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) = 2$, conformes au dénombrement direct.

Conclusion

pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$I(0, p) = p! \sum_{i=0}^p \frac{(-1)^i}{i!}.$$

3. (a) Loi de X_n .

L'univers est l'ensemble des $n!$ permutations des lettres, muni de la probabilité uniforme (hypothèse d'équiprobabilité). L'événement $[X_n = k]$ est formé des permutations ayant exactement k lettres bien placées, au nombre de $I(k, n)$.

Conclusion

$$\text{pour } k \in \{0, \dots, n\}, \quad P(X_n = k) = \frac{I(k, n)}{n!}.$$

(b) Relation $k P(X_n = k) = P(X_{n-1} = k - 1)$ et espérance de X_n .

Question rectifiée : la relation n'a de sens que si X_{n-1} est défini, c'est-à-dire pour $n \geq 2$.

Relation. Soit $n \geq 2$ et $1 \leq k \leq n$. D'après 3.(a) et 1.(a) :

$$k P(X_n = k) = k \cdot \frac{C_n^k I(0, n - k)}{n!} = k \cdot \frac{I(0, n - k)}{k! (n - k)!} = \frac{I(0, n - k)}{(k - 1)! (n - k)!}.$$

De même, avec $n - 1 \geq 1$ et $0 \leq k - 1 \leq n - 1$:

$$P(X_{n-1} = k - 1) = \frac{C_{n-1}^{k-1} I(0, (n - 1) - (k - 1))}{(n - 1)!} = \frac{I(0, n - k)}{(k - 1)! (n - k)!}.$$

Les deux quantités sont égales.

Espérance. X_n est une variable finie, son espérance existe.

Méthode 1 — Avec la relation précédente.

Pour $n \geq 2$:

$$E(X_n) = \sum_{k=0}^n k P(X_n = k) = \sum_{k=1}^n P(X_{n-1} = k-1) = \sum_{j=0}^{n-1} P(X_{n-1} = j) = 1$$

car X_{n-1} prend ses valeurs dans $\{0, \dots, n-1\}$. Pour $n = 1$, l'unique permutation laisse la lettre en place : $X_1 = 1$ et $E(X_1) = 1$.

Méthode 2 — Décomposition en indicatrices.

Pour $1 \leq i \leq n$, soit A_i l'événement « la lettre i est à sa place ». Les permutations fixant i sont au nombre de $(n-1)!$, donc $P(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$. Comme

$$X_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_i},$$

la linéarité de l'espérance donne

$$E(X_n) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} = 1.$$

La méthode 2 ne nécessite pas la loi de X_n et vaut pour tout $n \geq 1$; elle illustre l'intérêt de la linéarité, qui ne demande aucune indépendance.

Conclusion

pour tout $n \geq 1$, $E(X_n) = 1$.

4. (a) Limite de $P(X_n = k)$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé et $n \geq \max(k, 1)$. D'après 3.(a), 1.(a) et 2.(b) :

$$P(X_n = k) = \frac{C_n^k I(0, n-k)}{n!} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{I(0, n-k)}{(n-k)!} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}.$$

Quand $n \rightarrow +\infty$, $n-k \rightarrow +\infty$, et la somme partielle tend vers la somme de la série exponentielle en -1 , soit e^{-1} .

Conclusion

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k) = \frac{e^{-1}}{k!}.$$

(b) Approximation par une loi de Poisson.

Si X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, $P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$. Pour $\lambda = 1$, on obtient $P(X = k) = \frac{e^{-1}}{k!}$, qui est exactement la limite trouvée en (a), pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Conclusion

pour n grand, $P(X_n = k)$ est approché par $p_k = P(X = k) = \frac{e^{-1}}{k!}$, où X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1$. On note la cohérence avec $E(X_n) = 1 = E(X)$.

5. (a) Monotonie de (s_{2n}) et (s_{2n+1}) .

Soit $n \in \mathbb{N}$. On calcule les différences de deux termes consécutifs de chaque suite :

$$s_{2n+2} - s_{2n} = u_{2n+1} + u_{2n+2} = -\frac{1}{(2n+1)!} + \frac{1}{(2n+2)!} = \frac{1 - (2n+2)}{(2n+2)!} = -\frac{2n+1}{(2n+2)!} < 0$$

$$s_{2n+3} - s_{2n+1} = u_{2n+2} + u_{2n+3} = \frac{1}{(2n+2)!} - \frac{1}{(2n+3)!} = \frac{2n+2}{(2n+3)!} > 0.$$

Conclusion

(s_{2n}) est strictement décroissante et (s_{2n+1}) est strictement croissante.

(b) Position de e^{-1} et majoration de l'erreur.

Méthode 1 — Suites adjacentes.

Les suites (s_{2n}) et (s_{2n+1}) sont adjacentes : l'une décroît, l'autre croît, et

$s_{2n+1} - s_{2n} = u_{2n+1} = -\frac{1}{(2n+1)!} \rightarrow 0$. Elles convergent donc vers la même limite ℓ , avec, pour tout n :

$$s_{2n+1} \leq \ell \leq s_{2n}.$$

Par ailleurs (s_n) converge vers e^{-1} (série exponentielle), et (s_{2n}) en est une sous-suite, donc $\ell = e^{-1}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Si $n = 2m$ est pair : $s_{2m+1} \leq e^{-1} \leq s_{2m}$, donc e^{-1} est entre s_n et s_{n+1} .
- Si $n = 2m + 1$ est impair : $s_{2m+1} \leq e^{-1} \leq s_{2m+2}$, donc e^{-1} est entre s_n et s_{n+1} .

Dans les deux cas, e^{-1} appartient au segment d'extrémités s_n et s_{n+1} , dont la longueur est $|s_{n+1} - s_n| = |u_{n+1}|$. Donc $|s_n - e^{-1}| \leq |u_{n+1}|$.

Méthode 2 — Inégalité de Taylor-Lagrange (pour la majoration seule).

La fonction $\exp$ est de classe C^{n+1} sur $[-1, 0]$ et $|\exp^{(n+1)}| = \exp \leq 1$ sur $[-1, 0]$.

L'inégalité de Taylor-Lagrange entre 0 et -1 donne :

$$\left| e^{-1} - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \right| \leq \frac{|-1-0|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot 1 = \frac{1}{(n+1)!} = |u_{n+1}|.$$

Cette seconde approche donne directement la majoration, sans la position de e^{-1} entre deux sommes partielles ; la première, propre aux séries alternées dont le terme général décroît en valeur absolue, fournit en plus le sens de l'erreur.

Conclusion

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, e^{-1} \text{ est entre } s_n \text{ et } s_{n+1} \text{ et } |s_n - e^{-1}| \leq |u_{n+1}| = \frac{1}{(n+1)!}.$$

(c) Erreur de l'approximation de Poisson.

Soit $n \geq 1$ et $k \in \{0, \dots, n\}$. D'après le calcul fait en 4.(a), $P(X_n = k) = \frac{1}{k!} s_{n-k}$. Donc, d'après (b) appliqué au rang $n-k \in \mathbb{N}$:

$$|p_k - P(X_n = k)| = \frac{1}{k!} |e^{-1} - s_{n-k}| \leq \frac{1}{k!} |u_{n-k+1}| = \frac{1}{k! (n-k+1)!}.$$

Conclusion

$$|p_k - P(X_n = k)| \leq \frac{1}{k! (n-k+1)!}.$$

(d) Cas $n = 7$.

Question rectifiée : on compare p_k à $P(X_7 = k)$ (l'énoncé original écrit X_0).

D'après (c), pour $k \in \{0, \dots, 7\}$: $|p_k - P(X_7 = k)| \leq \frac{1}{k!(8-k)!} = \frac{C_8^k}{8!}$.

Les coefficients C_8^k valent 1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8 pour $k = 0, \dots, 7$; le plus grand est $C_8^4 = 70$. Donc, pour tout k :

$$|p_k - P(X_7 = k)| \leq \frac{70}{40320} = \frac{1}{576} \approx 1,74 \cdot 10^{-3} \leq 2 \cdot 10^{-3}.$$

Conclusion

pour tout $k \in \{0, \dots, 7\}$, $|p_k - P(X_7 = k)| \leq 2 \cdot 10^{-3}$.

Deuxième partie - B

1. (a) Étude et représentation de f .

$f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, de classe C^∞ sur $] -\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$ comme quotient de fonctions C^∞ dont le dénominateur ne s'annule pas.

Dérivée. Pour $x \neq 1$:

$$f'(x) = \frac{-e^{-x}(1-x) - e^{-x} \cdot (-1)}{(1-x)^2} = \frac{x e^{-x}}{(1-x)^2}.$$

Le signe de $f'(x)$ est celui de x : f est strictement décroissante sur $] -\infty, 0]$, strictement croissante sur $[0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.

Limites.

- En $-\infty$: en posant $y = -x \rightarrow +\infty$, $f(x) = \frac{e^y}{1+y} \rightarrow +\infty$ par croissances comparées.
- En 1^- : $e^{-x} \rightarrow e^{-1} > 0$ et $1-x \rightarrow 0^+$, donc $f(x) \rightarrow +\infty$.
- En 1^+ : $1-x \rightarrow 0^-$, donc $f(x) \rightarrow -\infty$.

- En $+\infty$: $e^{-x} \rightarrow 0$ et $1 - x \rightarrow -\infty$, donc $f(x) \rightarrow 0$, avec $f(x) < 0$ pour $x > 1$.

Valeur remarquable : $f(0) = 1$, minimum de f sur $] -\infty, 1[$, avec tangente horizontale.

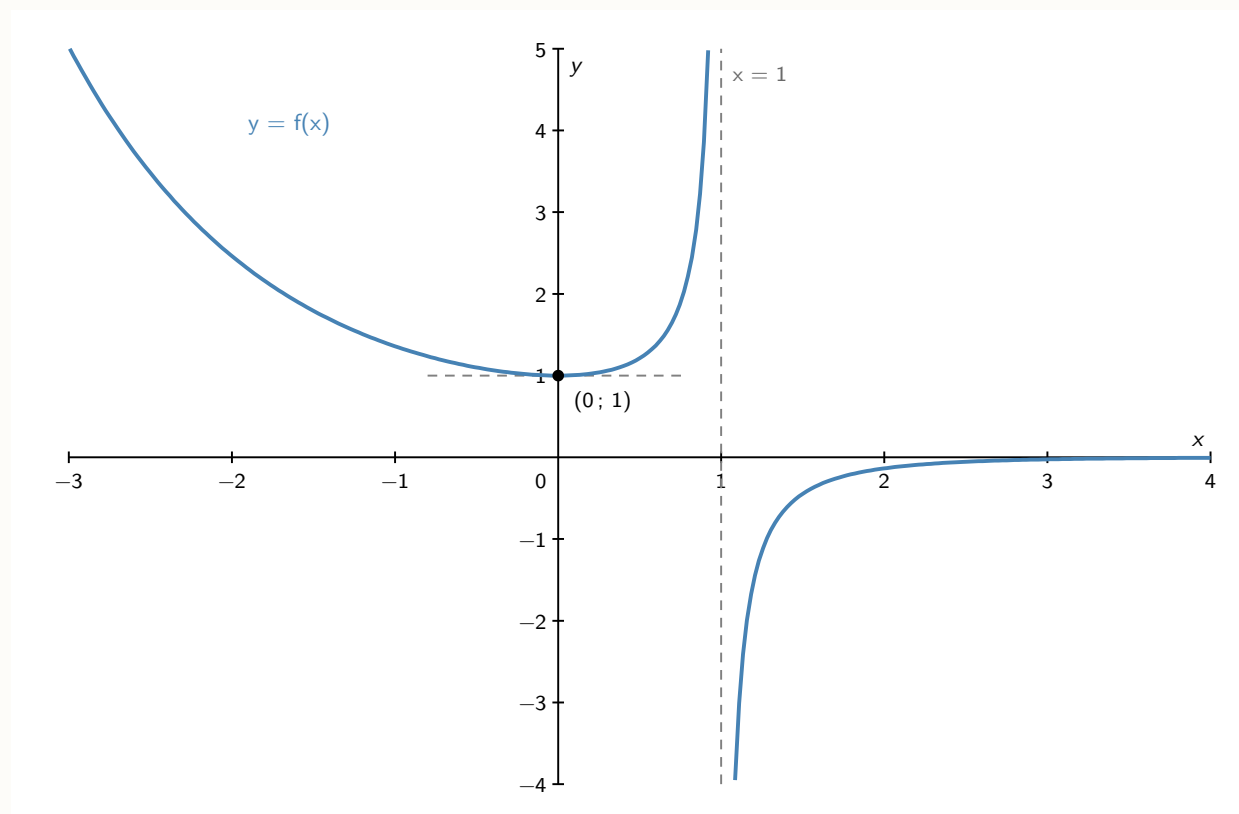
Convexité. En dérivant $f'(x) = x e^{-x}(1 - x)^{-2}$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= e^{-x}(1 - x)^{-2} - x e^{-x}(1 - x)^{-2} + 2x e^{-x}(1 - x)^{-3} = \frac{e^{-x} [(1 - x)^2 + 2x]}{(1 - x)^3} \\ &= \frac{e^{-x}(1 + x^2)}{(1 - x)^3}. \end{aligned}$$

Donc f est convexe sur $] -\infty, 1[$ et concave sur $]1, +\infty[$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+		+	
$f(x)$	$+\infty$	décroissante	1	croissante	$+\infty$	puis $-\infty$	croissante 0

Asymptotes : la droite $x = 1$ (verticale) et la droite $y = 0$ en $+\infty$.



Conclusion

f décroît de $+\infty$ à 1 sur $] -\infty, 0]$, croît de 1 à $+\infty$ sur $[0, 1[$, et croît de $-\infty$ à 0 sur $]1, +\infty[$.

(b) Dérivée n -ième de f .

On écrit $f = uv$ avec $u(x) = e^{-x}$ et $v(x) = (1 - x)^{-1}$, toutes deux de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, et on applique la formule de Leibniz.

Dérivées de u et v : $u^{(m)}(x) = (-1)^m e^{-x}$, et par récurrence immédiate $v^{(j)}(x) = \frac{j!}{(1-x)^{j+1}}$ (si c'est vrai au rang j , la dérivée de $j!(1-x)^{-(j+1)}$ est $j!(j+1)(1-x)^{-(j+2)}$).

Formule de Leibniz : pour $x \neq 1$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$f^{(n)}(x) = \sum_{j=0}^n C_n^j u^{(n-j)}(x) v^{(j)}(x) = \sum_{j=0}^n \frac{n!}{j! (n-j)!} (-1)^{n-j} e^{-x} \frac{j!}{(1-x)^{j+1}}.$$

Avec $i = n - j$:

$$f^{(n)}(x) = n! e^{-x} \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!} \cdot \frac{1}{(1-x)^{n-i+1}} = \frac{n! e^{-x}}{(1-x)^{n+1}} \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!} (1-x)^i.$$

En $x = 0$:

$$f^{(n)}(0) = n! \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!} = I(0, n)$$

d'après A.2.(b).

Conclusion

pour tout $x \neq 1$,

$$f^{(n)}(x) = \frac{n! e^{-x}}{(1-x)^{n+1}} \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!} (1-x)^i,$$

et

$$f^{(n)}(0) = n! \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!} = I(0, n).$$

(c) Expression de $P(X_n = k)$.

D'après A.3.(a), A.1.(a) et (b) ci-dessus, pour $0 \leq k \leq n$:

$$P(X_n = k) = \frac{C_n^k I(0, n-k)}{n!} = \frac{I(0, n-k)}{k! (n-k)!} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{f^{(n-k)}(0)}{(n-k)!}.$$

Conclusion

$$P(X_n = k) = \frac{1}{k!} \cdot \frac{f^{(n-k)}(0)}{(n-k)!}.$$

2. (a) Expression de $E(G_n)$.

G_n prend la valeur $g_k = S k! \alpha^k$ sur l'événement $[X_n = k]$, $0 \leq k \leq n$: c'est une variable finie, d'espérance :

$$E(G_n) = \sum_{k=0}^n S k! \alpha^k P(X_n = k) = S \sum_{k=0}^n \alpha^k \frac{f^{(n-k)}(0)}{(n-k)!}$$

d'après 1.(c). Avec $m = n - k$, on a $\alpha^k = \alpha^n \left(\frac{1}{\alpha}\right)^m$, d'où :

$$E(G_n) = S \alpha^n \sum_{m=0}^n \frac{f^{(m)}(0)}{m!} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^m.$$

On reconnaît la partie polynomiale de la formule de Taylor. La fonction f est de classe C^{n+1} sur l'intervalle $] -\infty, 1[$, qui contient le segment $\left[0, \frac{1}{\alpha}\right]$ puisque $0 < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{2}$. La formule de Taylor avec reste intégral entre 0 et $\frac{1}{\alpha}$ s'écrit :

$$f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \sum_{m=0}^n \frac{f^{(m)}(0)}{m!} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^m + \int_0^{1/\alpha} \frac{\left(\frac{1}{\alpha} - t\right)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Conclusion

$$E(G_n) = S \sum_{k=0}^n \alpha^k \frac{f^{(n-k)}(0)}{(n-k)!} = S \alpha^n \left[f\left(\frac{1}{\alpha}\right) - I_n(\alpha) \right].$$

(b) Majorations de $|f^{(p)}(t)|$.

Question rectifiée : intervalle $\left[0, \frac{1}{\alpha}\right]$ et facteur e^{-t} dans la première majoration (voir le relevé des adaptations).

Soit $t \in \left[0, \frac{1}{\alpha}\right]$ et $p \in \mathbb{N}$. On a $0 \leq t \leq \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{2}$, donc $1 - t > 0$.

Première majoration. D'après 1.(b) :

$$f^{(p)}(t) = \frac{p! e^{-t}}{(1-t)^{p+1}} \sum_{k=0}^p \frac{(-1)^k (1-t)^k}{k!}.$$

Le facteur $\frac{p! e^{-t}}{(1-t)^{p+1}}$ est strictement positif, et par l'inégalité triangulaire, comme $1 - t > 0$:

$$\left| \sum_{k=0}^p \frac{(-1)^k (1-t)^k}{k!} \right| \leq \sum_{k=0}^p \frac{(1-t)^k}{k!}.$$

D'où

$$|f^{(p)}(t)| \leq \frac{p! e^{-t}}{(1-t)^{p+1}} \sum_{k=0}^p \frac{(1-t)^k}{k!}.$$

Deuxième majoration. La série exponentielle

$$\sum \frac{(1-t)^k}{k!}$$

est à termes positifs et de somme e^{1-t} ; toute somme partielle est donc majorée par e^{1-t} .

Ainsi :

$$|f^{(p)}(t)| \leq \frac{p! e^{-t} e^{1-t}}{(1-t)^{p+1}} = \frac{p! e^{1-2t}}{(1-t)^{p+1}}.$$

Troisième majoration. Comme $t \geq 0$, $e^{1-2t} \leq e$. Comme $t \leq \frac{1}{\alpha}$, $1-t \geq 1 - \frac{1}{\alpha} > 0$, donc $(1-t)^{p+1} \geq \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^{p+1} > 0$. Par conséquent :

$$|f^{(p)}(t)| \leq \frac{p! e}{\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^{p+1}}.$$

Conclusion

les trois majorations demandées sont établies pour tout $t \in \left[0, \frac{1}{\alpha}\right]$ et tout $p \in \mathbb{N}$.

(c) Majoration de $|I_n(\alpha)|$.

On applique (b) avec $p = n + 1$, puis on intègre. Pour $t \in \left[0, \frac{1}{\alpha}\right]$, $\frac{(1/\alpha - t)^n}{n!} \geq 0$, donc, les bornes étant dans l'ordre croissant :

$$|I_n(\alpha)| \leq \int_0^{1/\alpha} \frac{\left(\frac{1}{\alpha} - t\right)^n}{n!} |f^{(n+1)}(t)| dt \leq \frac{(n+1)! e}{\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^{n+2}} \int_0^{1/\alpha} \frac{\left(\frac{1}{\alpha} - t\right)^n}{n!} dt.$$

Or :

$$\int_0^{1/\alpha} \frac{\left(\frac{1}{\alpha} - t\right)^n}{n!} dt = \left[-\frac{\left(\frac{1}{\alpha} - t\right)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_0^{1/\alpha} = \frac{1}{(n+1)! \alpha^{n+1}}.$$

Donc, avec $\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^{n+2} = \frac{(\alpha-1)^{n+2}}{\alpha^{n+2}}$:

$$|I_n(\alpha)| \leq \frac{e \alpha^{n+2}}{(\alpha-1)^{n+2} \alpha^{n+1}} = \frac{\alpha e}{(\alpha-1)^{n+2}}.$$

Conclusion

$$|I_n(\alpha)| \leq \frac{\alpha e}{(\alpha - 1)^{n+2}}.$$

(d) Équivalent de $E(G_n)$.

Comme $\alpha > 2$, on a $\alpha - 1 > 1$, donc $(\alpha - 1)^{n+2} \rightarrow +\infty$ et, d'après (c), $I_n(\alpha) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Par ailleurs $f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{e^{-1/\alpha}}{1 - \frac{1}{\alpha}} = \frac{\alpha e^{-1/\alpha}}{\alpha - 1} > 0$. D'après 2.(a) :

$$\frac{E(G_n)}{S \alpha^n f\left(\frac{1}{\alpha}\right)} = 1 - \frac{I_n(\alpha)}{f\left(\frac{1}{\alpha}\right)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Conclusion

$$E(G_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} S \alpha^n f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{S \alpha^{n+1} e^{-1/\alpha}}{\alpha - 1}.$$

3. (a) Signe de Φ_p sur $[0, 1]$.

Décroissance. Soit $u \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{u^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{u^n}{n!} \cdot \frac{u}{n+1} \leq \frac{u^n}{n!}$$

car $0 \leq \frac{u}{n+1} \leq 1$ et $\frac{u^n}{n!} \geq 0$. La suite $\left(\frac{u^n}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante.

Cas p impair. Écrivons $p = 2q + 1$; on regroupe les termes par paires consécutives :

$$\Phi_p(u) = \sum_{j=0}^q \left[\frac{u^{2j}}{(2j)!} - \frac{u^{2j+1}}{(2j+1)!} \right] \geq 0$$

car chaque crochet est positif par décroissance de la suite.

Cas p pair. Si $p = 0$, $\Phi_0(u) = 1 > 0$. Si $p \geq 2$ est pair, $p - 1$ est impair et :

$$\Phi_p(u) = \Phi_{p-1}(u) + \frac{u^p}{p!} \geq \Phi_{p-1}(u) \geq 0.$$

Conclusion

pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $u \in [0, 1]$, $\Phi_p(u) \geq 0$.

(b) Expression de $f^{(p)}$ et signe sur $\left[0, \frac{1}{\alpha}\right]$.

Méthode 1 — Lecture de la formule de Leibniz.

D'après 1.(b), pour $t \neq 1$:

$$f^{(p)}(t) = \frac{p! e^{-t}}{(1-t)^{p+1}} \sum_{i=0}^p \frac{(-1)^i}{i!} (1-t)^i = \frac{p! e^{-t}}{(1-t)^{p+1}} \Phi_p(1-t)$$

où l'on a prolongé la définition de Φ_p à tout réel par la même formule polynomiale.

Méthode 2 — Récurrence sur p .

Notons $\mathcal{P}(p)$: « pour tout $t < 1$, $f^{(p)}(t) = p! e^{-t} (1-t)^{-(p+1)} \Phi_p(1-t)$ ». $\mathcal{P}(0)$ est vraie car $\Phi_0 = 1$. Supposons $\mathcal{P}(p)$. On note $w = 1 - t$ et on remarque que :

$$\Phi'_p(w) = \sum_{i=1}^p \frac{(-1)^i}{(i-1)!} w^{i-1} = -\Phi_{p-1}(w) = -\Phi_p(w) + \frac{(-1)^p w^p}{p!}$$

(somme vide pour $p = 0$, ce qui reste cohérent). En dérivant $t \mapsto e^{-t}w^{-(p+1)}\Phi_p(w)$, avec $\frac{dw}{dt} = -1$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} [e^{-t}w^{-(p+1)}\Phi_p(w)] &= e^{-t}w^{-(p+1)} \left[-\Phi_p(w) + \frac{(p+1)}{w}\Phi_p(w) - \Phi_p'(w) \right] \\ &= e^{-t}w^{-(p+2)} \left[(p+1)\Phi_p(w) + \frac{(-1)^{p+1}w^{p+1}}{p!} \right].\end{aligned}$$

Or

$$(p+1)\Phi_p(w) + \frac{(-1)^{p+1}w^{p+1}}{p!} = (p+1) \left[\Phi_p(w) + \frac{(-1)^{p+1}w^{p+1}}{(p+1)!} \right] = (p+1)\Phi_{p+1}(w).$$

En multipliant par $p!$, on obtient $f^{(p+1)}(t) = (p+1)!e^{-t}w^{-(p+2)}\Phi_{p+1}(w) : \mathcal{P}(p+1)$ est vraie.

La méthode 1 réutilise un calcul déjà fait ; la méthode 2 est autonome et montre comment vérifier une formule de dérivée p -ième donnée par l'énoncé.

Signe. Pour $t \in \left[0, \frac{1}{\alpha}\right]$, $1-t \in \left[1 - \frac{1}{\alpha}, 1\right] \subset [0, 1]$, donc $\Phi_p(1-t) \geq 0$ d'après (a), et $\frac{p!e^{-t}}{(1-t)^{p+1}} > 0$.

Conclusion

$$f^{(p)}(t) = \frac{p!e^{-t}}{(1-t)^{p+1}}\Phi_p(1-t) \text{ et } f^{(p)}(t) \geq 0 \text{ pour tout } t \in \left[0, \frac{1}{\alpha}\right] \text{ et tout } p \in \mathbb{N}.$$

(c) Encadrement de $E(G_n)$.

Majoration. Sur $\left[0, \frac{1}{\alpha}\right]$, $\frac{(1/\alpha - t)^n}{n!} \geq 0$ et $f^{(n+1)}(t) \geq 0$ d'après (b) ; par positivité de l'intégrale (bornes croissantes), $I_n(\alpha) \geq 0$. Avec 2.(a) et $S\alpha^n > 0$: $E(G_n) \leq S\alpha^n f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$.

Minoration. D'après 2.(c), $I_n(\alpha) \leq |I_n(\alpha)| \leq \frac{\alpha e}{(\alpha - 1)^{n+2}}$, donc

$f\left(\frac{1}{\alpha}\right) - I_n(\alpha) \geq f\left(\frac{1}{\alpha}\right) - \frac{\alpha e}{(\alpha - 1)^{n+2}}$, et on multiplie par $S\alpha^n > 0$.

Conclusion

$$S \alpha^n \left[f\left(\frac{1}{\alpha}\right) - \frac{\alpha e}{(\alpha - 1)^{n+2}} \right] \leq E(G_n) \leq S \alpha^n f\left(\frac{1}{\alpha}\right).$$

4. (a) Valeurs de $P(X_7 = k)$.

D'après A.1.(a) et A.3.(a), $P(X_7 = k) = \frac{C_7^k I(0, 7 - k)}{7!}$ avec $7! = 5040$. Les valeurs

$$I(0, m) = m! \sum_{i=0}^m \frac{(-1)^i}{i!}$$

sont, pour $m = 0, \dots, 7$: 1, 0, 1, 2, 9, 44, 265, 1854 (par exemple

$$I(0, 4) = 24 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} \right) = 12 - 4 + 1 = 9).$$

k	C_7^k	$I(0, 7 - k)$	$P(X_7 = k)$	valeur décimale
0	1	1854	$\frac{103}{280}$	0,36786
1	7	265	$\frac{53}{144}$	0,36806
2	21	44	$\frac{11}{60}$	0,18333
3	35	9	$\frac{1}{16}$	0,06250
4	35	2	$\frac{1}{72}$	0,01389
5	21	1	$\frac{1}{240}$	0,00417
6	7	0	0	0
7	1	1	$\frac{1}{5040}$	0,00020

Contrôle : $1854 + 1855 + 924 + 315 + 70 + 21 + 0 + 1 = 5040$, la somme des probabilités vaut bien 1. On a $P(X_7 = 6) = 0$: si six lettres sont à leur place, la septième l'est aussi.

Conclusion

la loi de X_7 est donnée par le tableau ci-dessus ; elle est proche de la loi de Poisson de paramètre 1 ($e^{-1} \approx 0,36788$, $\frac{e^{-1}}{2} \approx 0,18394$, ...), conformément à A.5.(d).

(b) Calcul de $E(G_7)$.

D'après 2.(a),

$$E(G_7) = S \sum_{k=0}^7 3^k \frac{f^{(7-k)}(0)}{(7-k)!} = S \sum_{k=0}^7 3^k \frac{I(0, 7-k)}{(7-k)!}$$

(on peut aussi calculer directement

$$\sum_k k! 3^k P(X_7 = k),$$

ce qui donne les mêmes termes).

k	3^k	$\frac{I(0, 7-k)}{(7-k)!}$	terme
0	1	$\frac{1854}{5040}$	
			$\frac{103}{280} \approx 0,3679$
1	3	$\frac{265}{720}$	
			$\frac{53}{48} \approx 1,1042$
2	9	$\frac{44}{120}$	$\frac{33}{10} = 3,3$

k	3^k	$\frac{I(0, 7-k)}{(7-k)!}$	terme
3	27	$\frac{9}{24}$	
			$\frac{81}{8} = 10,125$
4	81	$\frac{2}{6}$	27
5	243	$\frac{1}{2}$	121,5
6	729	0	0
7	2187	1	2187

En sommant :

$$E(G_7) = \frac{3948667}{1680} S \approx 2350,40 S.$$

Conclusion

$$E(G_7) = \frac{3948667}{1680} S \approx 2350,40 S.$$

(c) Comparaison avec l'encadrement de 3.(c).

Avec $n = 7$ et $\alpha = 3$: $\alpha^n = 2187$, $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{e^{-1/3}}{2/3} = \frac{3}{2}e^{-1/3} \approx 1,074797$ et

$$\frac{\alpha e}{(\alpha - 1)^{n+2}} = \frac{3e}{2^9} = \frac{3e}{512} \approx 0,015927.$$

$$\text{Majorant : } S \cdot 2187 \cdot \frac{3}{2}e^{-1/3} \approx 2350,58 S.$$

$$\text{Minorant : } S \cdot 2187 \left(\frac{3}{2}e^{-1/3} - \frac{3e}{512} \right) \approx 2315,75 S.$$

On a bien $2315,75 S \leq 2350,40 S \leq 2350,58 S$. La valeur exacte est très proche du majorant : l'écart vaut environ $0,18 S$, soit une erreur relative d'environ $8 \cdot 10^{-5}$, ce qui correspond à $I_7(3) \approx 8,4 \cdot 10^{-5}$. La borne $\frac{3e}{512} \approx 1,6 \cdot 10^{-2}$ de 2.(c) est donc environ 190 fois trop grande : la majoration de $|f^{(n+1)}|$ par sa valeur au pire point est pessimiste.

Conclusion

le résultat est conforme à l'encadrement de 3.(c), et l'équivalent $S \alpha^n f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ de 2.(d) fournit dès $n = 7$ une excellente approximation de $E(G_7)$.

Relevé des adaptations

Aucune notion hors programme (nombres complexes, Slutsky, critère d'extremum ancien, code non Python) n'apparaît dans l'épreuve ; les adaptations sont des rectifications d'erreurs de l'énoncé original.

- Problème, préambule : « portant dans un nombre quelconque les n lettres » remplacé par « portant, dans un ordre quelconque, les n lettres », et « qui laissent k éléments » précisé en « qui laissent exactement k éléments » ; c'est le sens utilisé dans tout le problème.
- A.2.(a) : l'énoncé original écrit $C_j^k C_n^i = C_n^k C_{n-k}^{i-k}$ pour $0 \leq i \leq k \leq n$ et

$$\sum_{i=k}^n (-1)^j C_j^k C_n^i = 0.$$

Indices rectifiés en $C_i^k C_n^i = C_n^k C_{n-k}^{i-k}$ pour $0 \leq k \leq i \leq n$, et

$$\sum_{i=k}^n (-1)^i C_i^k C_n^i = 0$$

restreint à $0 \leq k < n$ (pour $k = n$ la somme vaut $(-1)^n$). C'est la forme utilisée en A.2.(b).

- A.2.(b) : « la relation (R) » remplacé par « la relation (1) », seule relation numérotée de l'énoncé.
- A.3.(b) : ajout de la condition $n \geq 2$, car X_{n-1} n'est pas défini pour $n = 1$; le cas $n = 1$ est traité directement dans le corrigé.
- A.5.(d) : $P(X_0 = k)$ remplacé par $P(X_7 = k)$, conformément à l'hypothèse $n = 7$.
- B.2.(a) : la borne supérieure $1/e$ de l'intégrale $I_n(\alpha)$ est remplacée par $1/\alpha$, seule valeur compatible avec la formule de Taylor en $\frac{1}{\alpha}$ et avec la suite du problème.
- B.2.(b) : l'intervalle « $[0; 1; \alpha]$ » est remplacé par $\left[0, \frac{1}{\alpha}\right]$, et le facteur e^{-1} de la première majoration par e^{-t} . L'énoncé original est faux (pour $p = 0$ et $t = 0$, il affirmerait $1 \leq e^{-1}$) et la version rectifiée est celle qui conduit à la deuxième majoration $\frac{p! e^{1-2t}}{(1-t)^{p+1}}$ demandée.
- Exercice d'analyse, question 7, et B.1.(a) : les courbes demandées sont tracées en SVG dans le corrigé, calculées exactement à partir des définitions de F et de f (intégration numérique pour F).