



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ECRICOME — 1988

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

EXERCICE DE MATHÉMATIQUES

1. (a)

Il s'agit d'établir une relation de récurrence entre $I(n, p)$ et $I(n-1, p+1)$. On intègre par parties sur le segment $[-1, 1]$ en dérivant le facteur $(x-1)^n$ et en primitivant le facteur $(x+1)^p$.

Soit $n \geq 1$ et $p \in \mathbb{N}$. On pose, pour $x \in [-1, 1]$:

$$u(x) = (x-1)^n \quad v(x) = \frac{(x+1)^{p+1}}{p+1}$$

Les fonctions u et v sont polynomiales, donc de classe C^1 sur $[-1, 1]$, avec $u'(x) = n(x-1)^{n-1}$ et $v'(x) = (x+1)^p$. Par intégration par parties :

$$I(n, p) = \int_{-1}^1 u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 u'(x)v(x) dx$$

Le crochet est nul : $u(1) = 0^n = 0$ car $n \geq 1$, et $v(-1) = \frac{0^{p+1}}{p+1} = 0$ car $p+1 \geq 1$. Il reste :

$$I(n, p) = - \int_{-1}^1 n(x-1)^{n-1} \frac{(x+1)^{p+1}}{p+1} dx = -\frac{n}{p+1} \int_{-1}^1 (x-1)^{n-1} (x+1)^{p+1} dx$$

Conclusion

pour tout $n \geq 1$ et tout $p \in \mathbb{N}$,
$$I(n, p) = -\frac{n}{p+1} I(n-1, p+1).$$

(b)

On itère la relation précédente jusqu'à faire disparaître le facteur $(x-1)^n$, puis on calcule directement l'intégrale obtenue.

Fixons n et p . Montrons par récurrence finie que, pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$:

$$\mathcal{H}(k) : \quad I(n, p) = (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} \frac{p!}{(p+k)!} I(n-k, p+k)$$

Initialisation : pour $k = 0$, le coefficient vaut 1 et $\mathcal{H}(0)$ est l'égalité $I(n, p) = I(n, p)$.

Hérédité : soit $k \in \{0, \dots, n-1\}$ tel que $\mathcal{H}(k)$ soit vraie. Comme $n-k \geq 1$, la question

(a) appliquée au couple $(n-k, p+k)$ donne

$$I(n-k, p+k) = -\frac{n-k}{p+k+1} I(n-k-1, p+k+1). \text{ Donc}$$

$$\begin{aligned} I(n, p) &= (-1)^{k+1} \frac{n! (n-k)}{(n-k)!} \frac{p!}{(p+k)! (p+k+1)} I(n-k-1, p+k+1) \\ &= (-1)^{k+1} \frac{n!}{(n-k-1)!} \frac{p!}{(p+k+1)!} I(n-(k+1), p+(k+1)) \end{aligned}$$

ce qui est $\mathcal{H}(k+1)$.

Pour $k = n$, on obtient $I(n, p) = (-1)^n \frac{n! p!}{(n+p)!} I(0, n+p)$. Or, pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$$I(0, m) = \int_{-1}^1 (x+1)^m dx = \left[\frac{(x+1)^{m+1}}{m+1} \right]_{-1}^1 = \frac{2^{m+1}}{m+1}$$

Avec $m = n+p$ et $(n+p)!(n+p+1) = (n+p+1)!$, on conclut :

$$I(n, p) = (-1)^n \frac{n! p! 2^{n+p+1}}{(n+p+1)!}$$

En particulier, pour $n = p$:

$$I(p, p) = (-1)^p \frac{(p!)^2 2^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

Contrôle : $I(0, 0) = \int_{-1}^1 dx = 2$ et la formule donne $\frac{2}{1} = 2$;

$$I(1, 1) = \int_{-1}^1 (x^2 - 1) dx = \frac{2}{3} - 2 = -\frac{4}{3} \text{ et la formule donne } -\frac{1 \cdot 1 \cdot 8}{6} = -\frac{4}{3}.$$

2. (a)

On applique la définition : L_n est la dérivée n -ième de $x \mapsto (x^2 - 1)^n$, la dérivée d'ordre 0 étant la fonction elle-même.

$$L_0(x) = (x^2 - 1)^0 = 1.$$

$$L_1(x) = \frac{d}{dx} [x^2 - 1] = 2x.$$

$(x^2 - 1)^2 = x^4 - 2x^2 + 1$, de dérivée $4x^3 - 4x$, puis de dérivée seconde $12x^2 - 4$. Donc

$$L_2(x) = 12x^2 - 4.$$

Conclusion

$$L_0(x) = 1, L_1(x) = 2x, L_2(x) = 12x^2 - 4 \text{ pour tout } x \in [-1, 1].$$

(b)

Il faut établir que L_n est polynomiale de degré n et déterminer son coefficient dominant.

Deux approches naturelles : suivre le degré et le coefficient dominant au fil des dérivations successives, ou développer $(x^2 - 1)^n$ par la formule du binôme et dériver terme à terme.

Notons $G_n(x) = (x^2 - 1)^n$. Par la formule du binôme :

$$G_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} x^{2k}$$

donc G_n est polynomiale de degré $2n$, de coefficient dominant $\binom{n}{n} = 1$.

Méthode 1 — Suivi du degré lors des dérivations successives.

Rappel : si Q est un polynôme de degré $d \geq 1$ de coefficient dominant c , alors Q' est un

polynôme de degré $d - 1$ de coefficient dominant dc (le terme cx^d se dérive en dcx^{d-1} avec $dc \neq 0$, et les autres termes donnent des monômes de degré au plus $d - 2$).

Pour $n = 0$, $L_0 = 1$ est de degré 0 de coefficient dominant $1 = \frac{0!}{0!}$.

Pour $n \geq 1$, montrons par récurrence finie que pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $G_n^{(k)}$ est un polynôme de degré $2n - k$ de coefficient dominant $\frac{(2n)!}{(2n - k)!}$. C'est vrai pour $k = 0$. Si c'est vrai pour un $k \leq n - 1$, alors $2n - k \geq n + 1 \geq 1$, et le rappel montre que $G_n^{(k+1)}$ est de degré $2n - k - 1$, de coefficient dominant $(2n - k) \frac{(2n)!}{(2n - k)!} = \frac{(2n)!}{(2n - k - 1)!}$.

Pour $k = n$: $L_n = G_n^{(n)}$ est polynomiale de degré n , de coefficient dominant $\frac{(2n)!}{n!}$.

Méthode 2 — Développement par la formule du binôme.

Pour $0 \leq k \leq n$, la dérivée n -ième de $x \mapsto x^{2k}$ est nulle si $2k < n$, et vaut $\frac{(2k)!}{(2k - n)!} x^{2k - n}$ si $2k \geq n$. Par linéarité de la dérivation :

$$L_n(x) = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ 2k \geq n}} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \frac{(2k)!}{(2k - n)!} x^{2k - n}$$

Les exposants $2k - n$ sont deux à deux distincts et le plus grand, n , est obtenu pour $k = n$, avec le coefficient $\binom{n}{n} (-1)^0 \frac{(2n)!}{n!} = \frac{(2n)!}{n!} \neq 0$.

Cette seconde méthode fournit en plus une expression explicite de tous les coefficients de L_n ; la première est plus économique et ne demande que le comportement du degré par dérivation.

Conclusion

pour tout $n \in \mathbb{N}$, L_n est une fonction polynomiale de degré n dont le coefficient de x^n est $\frac{(2n)!}{n!}$. Contrôle : $\frac{2!}{1!} = 2$ pour L_1 et $\frac{4!}{2!} = 12$ pour L_2 .

(c)

Soit $n \geq 1$ et $i \in \{0, \dots, n-1\}$. La dérivée i -ième d'un polynôme est un polynôme ; il faut montrer que $G_n^{(i)}$ s'annule en 1 et en -1 . On utilise l'écriture $G_n(x) = (x-1)^n(x+1)^n$.

Méthode 1 — Formule de Leibniz.

Les fonctions $x \mapsto (x-1)^n$ et $x \mapsto (x+1)^n$ sont de classe C^∞ . Pour $0 \leq k \leq n$, la dérivée k -ième de $x \mapsto (x-1)^n$ est $x \mapsto \frac{n!}{(n-k)!}(x-1)^{n-k}$, et de même pour $(x+1)^n$. La formule de Leibniz donne :

$$G_n^{(i)}(x) = \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} \frac{n!}{(n-k)!} (x-1)^{n-k} \frac{n!}{(n-i+k)!} (x+1)^{n-i+k}$$

Dans chaque terme, $k \leq i \leq n-1$ donc $n-k \geq 1$: chaque terme contient le facteur $(x-1)$ et s'annule en 1. De même $i-k \leq n-1$ donc $n-i+k \geq 1$: chaque terme contient le facteur $(x+1)$ et s'annule en -1 .

Méthode 2 — Multiplicité des racines.

$G_n(x) = (x-1)^n Q(x)$ avec $Q(x) = (x+1)^n$ polynomial : 1 est racine de G_n de multiplicité au moins n . D'après la caractérisation de la multiplicité par les dérivées successives (conséquence de la formule de Taylor pour les polynômes), un réel a est racine de multiplicité au moins m d'un polynôme R si et seulement si $R(a) = R'(a) = \dots = R^{(m-1)}(a) = 0$. Avec $m = n$, on obtient $G_n^{(i)}(1) = 0$ pour tout

$i \in \{0, \dots, n-1\}$. Le même raisonnement avec $G_n(x) = (x+1)^n(x-1)^n$ donne $G_n^{(i)}(-1) = 0$.

La première méthode est un calcul direct ; la seconde fait apparaître la raison structurelle (la multiplicité n des racines ± 1) et se réutilise dès qu'un polynôme est factorisé par une puissance de $x - a$.

Conclusion

pour $n \geq 1$ et $0 \leq i \leq n-1$, $\frac{d^i}{dx^i} [(x^2-1)^n]$ est un polynôme admettant -1 et 1 comme racines.

3.

On calcule $K_n = \int_{-1}^1 L_n(x)^2 dx$ en transférant, par n intégrations par parties successives, toutes les dérivations de l'un des facteurs $L_n = G_n^{(n)}$ vers l'autre facteur ; les termes de bord sont nuls grâce à 2.(c), et l'on se ramène à $I(n, n)$.

Cas $n = 0$: $K_0 = \int_{-1}^1 1 dx = 2$.

Cas $n \geq 1$. Montrons par récurrence finie que pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$:

$$\mathcal{P}(k) : K_n = (-1)^k \int_{-1}^1 G_n^{(n-k)}(x) L_n^{(k)}(x) dx$$

Pour $k = 0$, c'est la définition de K_n puisque $G_n^{(n)} = L_n$.

Soit $k \in \{0, \dots, n-1\}$ tel que $\mathcal{P}(k)$ soit vraie. Les fonctions $G_n^{(n-k-1)}$ et $L_n^{(k)}$ sont polynomiales, donc de classe C^1 sur $[-1, 1]$, et la dérivée de $G_n^{(n-k-1)}$ est $G_n^{(n-k)}$. Par intégration par parties :

$$\int_{-1}^1 G_n^{(n-k)}(x) L_n^{(k)}(x) dx = \left[G_n^{(n-k-1)}(x) L_n^{(k)}(x) \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 G_n^{(n-k-1)}(x) L_n^{(k+1)}(x) dx$$

Comme $0 \leq n-k-1 \leq n-1$, la question 2.(c) donne $G_n^{(n-k-1)}(1) = G_n^{(n-k-1)}(-1) = 0$: le crochet est nul. En reportant dans $\mathcal{P}(k)$, on obtient $\mathcal{P}(k+1)$.

Pour $k = n$: $K_n = (-1)^n \int_{-1}^1 G_n(x) L_n^{(n)}(x) dx$. D'après 2.(b),

$L_n(x) = \frac{(2n)!}{n!} x^n + R(x)$ avec R de degré au plus $n-1$, donc $L_n^{(n)}$ est la constante $n! \cdot \frac{(2n)!}{n!} = (2n)!$. D'où :

$$\begin{aligned} K_n &= (-1)^n (2n)! \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n dx = (-1)^n (2n)! \int_{-1}^1 (x-1)^n (x+1)^n dx \\ &= (-1)^n (2n)! I(n, n) \end{aligned}$$

Avec 1.(b) : $I(n, n) = (-1)^n \frac{(n!)^2 2^{2n+1}}{(2n+1)!}$, donc

$$K_n = (2n)! \frac{(n!)^2 2^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{2^{2n+1} (n!)^2}{2n+1}$$

Cette formule donne aussi $K_0 = 2$: elle vaut pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Contrôle : $K_1 = \int_{-1}^1 4x^2 dx = \frac{8}{3}$ et la formule donne $\frac{2^3}{3} = \frac{8}{3}$.

Conclusion

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad K_n = \frac{2^{2n+1} (n!)^2}{2n+1}.$$

EXERCICE DE STATISTIQUES-PROBABILITÉS

Notations. On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et φ sa densité : $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$. La fonction φ est continue sur $\mathbb{R}$, donc Φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec $\Phi' = \varphi$. Par parité de φ , $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ pour tout réel x . Comme Z est à densité, $P(Z = a) = 0$ pour tout réel a , de sorte que les inégalités larges ou strictes portant sur Z ou sur R donnent les mêmes probabilités.

Valeurs lues dans la table : $\Phi(1) \approx 0,8413$ et $\Phi(2) \approx 0,9772$, donc $\Phi(-1) \approx 0,1587$ et $\Phi(-2) \approx 0,0228$.

1.

On exprime l'espérance du coût comme une fonction g du seuil $s \in [0, +\infty[$, puis on étudie les variations de g grâce à sa dérivée.

Loi du coût. Notons C le coût de l'opération. Le système complet d'événements $([E = -1], [E = 2])$ a pour probabilités $P(E = -1) = 0,2$ (message 0) et $P(E = 2) = 0,8$ (message 1). Par indépendance de E et Z , par exemple :

$$\begin{aligned} P([E = -1] \cap [R > s]) &= P([E = -1] \cap [Z > s + 1]) = P(E = -1) P(Z > s + 1) \\ &= 0,2 (1 - \Phi(s + 1)) \end{aligned}$$

On obtient de même :

- message 0 interprété comme 1 : $P([E = -1] \cap [R > s]) = 0,2 (1 - \Phi(s + 1))$, coût 500 ;
- message 0 annulé :

$$P([E = -1] \cap [0 \leq R \leq s]) = 0,2 P(1 \leq Z \leq s + 1) = 0,2 (\Phi(s + 1) - \Phi(1)),$$

coût 200 ;

- message 0 bien interprété : $P([E = -1] \cap [R < 0])$, coût 0 ;
- message 1 interprété comme 0 : $P([E = 2] \cap [R < 0]) = 0,8 P(Z < -2) = 0,8 \Phi(-2)$, coût 1000 ;
- message 1 annulé :

$$P([E = 2] \cap [0 \leq R \leq s]) = 0,8 P(-2 \leq Z \leq s - 2) = 0,8 (\Phi(s - 2) - \Phi(-2)),$$

coût 200 ;

- message 1 bien interprété : $P([E = 2] \cap [R > s])$, coût 0.

Ces six événements forment un système complet d'événements. La variable C est finie (à valeurs dans $\{0, 200, 500, 1000\}$), donc elle admet une espérance :

$$g(s) = E(C) = 500 \cdot 0,2 (1 - \Phi(s+1)) + 200 \cdot 0,2 (\Phi(s+1) - \Phi(1)) + 1000 \cdot 0,8 \Phi(-2) \\ + 200 \cdot 0,8 (\Phi(s-2) - \Phi(-2))$$

soit, après regroupement :

$$g(s) = 100 - 60 \Phi(s+1) + 160 \Phi(s-2) - 40 \Phi(1) + 640 \Phi(-2)$$

Variations. La fonction g est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ et

$$g'(s) = 160 \varphi(s-2) - 60 \varphi(s+1) = \frac{20}{\sqrt{2\pi}} (8 e^{-(s-2)^2/2} - 3 e^{-(s+1)^2/2})$$

Les deux termes de la parenthèse étant strictement positifs et $\ln$ étant strictement croissante sur $]0, +\infty[$:

$$g'(s) > 0 \iff \ln 8 - \frac{(s-2)^2}{2} > \ln 3 - \frac{(s+1)^2}{2} \iff \ln \frac{8}{3} + \frac{(s+1)^2 - (s-2)^2}{2} > 0$$

Or $(s+1)^2 - (s-2)^2 = 6s - 3$. Donc

$$g'(s) > 0 \iff \ln \frac{8}{3} + 3s - \frac{3}{2} > 0 \iff s > s^*, \text{ où}$$

$$s^* = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \ln \frac{8}{3}$$

et de même $g'(s) < 0 \iff s < s^*, g'(s^*) = 0$. On a $s^* > 0$ car $\frac{8}{3} < 2,7 < e$, donc

$\ln \frac{8}{3} < 1 < \frac{3}{2}$. Numériquement $\ln \frac{8}{3} \approx 0,9808$ et $s^* \approx 0,173$.

Ainsi g est strictement décroissante sur $[0, s^*]$ et strictement croissante sur $[s^*, +\infty[$: elle admet sur $[0, +\infty[$ un minimum global, atteint uniquement en s^* .

Valeur du minimum. Avec la table, $\Phi(s^* + 1) \approx \Phi(1,17) \approx 0,8790$ et

$$\Phi(s^* - 2) \approx \Phi(-1,83) = 1 - \Phi(1,83) \approx 1 - 0,9664 = 0,0336 :$$

$$g(s^*) \approx 100 - 60 \times 0,8790 + 160 \times 0,0336 - 40 \times 0,8413 + 640 \times 0,0228 \approx 33,6$$

À titre de comparaison, pour $s = 0$: $g(0) = 100 - 100 \Phi(1) + 800 \Phi(-2) \approx 34,1$.

Conclusion

l'espérance du coût est minimale pour le seuil $s^* = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \ln \frac{8}{3} \approx 0,173$; elle vaut alors environ 33,6 unités.

2.

Le message émis est connu : il comporte quatre chiffres 1 (émis sous la forme 2) et trois chiffres 0 (émis sous la forme -1). On calcule la probabilité de bonne interprétation de chaque chiffre, puis on utilise l'indépendance des bruits.

Notons $Z_1, \dots, Z_7$ les bruits affectant les sept chiffres, mutuellement indépendants de loi normale centrée réduite. Avec $s = 0$:

- un chiffre 1 (valeur émise 2, bruit Z_k) est correctement interprété si et seulement si $2 + Z_k > 0$, avec probabilité $P(Z_k > -2) = 1 - \Phi(-2) = \Phi(2)$;
- un chiffre 0 (valeur émise -1) est correctement interprété si et seulement si $-1 + Z_k < 0$, avec probabilité $P(Z_k < 1) = \Phi(1)$.

L'annulation correspondrait à $R = 0$, événement de probabilité nulle. Chacun des sept événements « le k -ième chiffre est correctement interprété » ne dépend que de Z_k ; par le lemme des coalitions, ces sept événements sont mutuellement indépendants. Donc :

$$P(\text{message correctement interprété}) = \Phi(2)^4 \Phi(1)^3 \approx 0,9772^4 \times 0,8413^3 \approx 0,543$$

Conclusion

la probabilité que le message 1101001 soit correctement interprété en B est $\Phi(2)^4 \Phi(1)^3 \approx 0,543$.

3.

Un chiffre est le même en A et en C s'il est bien transmis deux fois, ou s'il est inversé deux fois (une erreur de A vers B compensée par une erreur de B vers C). On calcule cette probabilité pour un chiffre 1 et pour un chiffre 0, puis on utilise l'indépendance.

Pour le k -ième chiffre, notons Z_k le bruit de la transmission de A vers B et Z'_k celui de la transmission de B vers C . Les quatorze variables sont mutuellement indépendantes, de loi normale centrée réduite. Les événements de probabilité nulle ($R = 0$) sont négligés.

Chiffre 1. Il est émis en A sous la forme 2.

- Si $Z_k > -2$, B lit 1 et réémet 2 ; C lit 1 si et seulement si $Z'_k > -2$.
- Si $Z_k < -2$, B lit 0 et réémet -1 ; C lit 1 si et seulement si $-1 + Z'_k > 0$, c'est-à-dire $Z'_k > 1$.

Ces deux cas sont incompatibles, et Z_k, Z'_k sont indépendantes, donc :

$$p_1 = P(Z_k > -2)P(Z'_k > -2) + P(Z_k < -2)P(Z'_k > 1) = \Phi(2)^2 + (1 - \Phi(2))(1 - \Phi(1))$$

Chiffre 0. Il est émis sous la forme -1 . De même :

- si $Z_k < 1$, B lit 0, réémet -1 , et C lit 0 si et seulement si $Z'_k < 1$;

- si $Z_k > 1$, B lit 1, réémet 2, et C lit 0 si et seulement si $Z'_k < -2$.

$$p_0 = \Phi(1)^2 + (1 - \Phi(1))(1 - \Phi(2))$$

Les événements relatifs aux différents chiffres ne dépendent que des couples (Z_k, Z'_k) correspondants ; par le lemme des coalitions, ils sont mutuellement indépendants. Le message comporte quatre 1 et trois 0, donc :

$$P(\text{même message en } A \text{ et } C) = p_1^4 p_0^3$$

Numériquement : $p_1 \approx 0,9772^2 + 0,0228 \times 0,1587 \approx 0,9585$ et $p_0 \approx 0,8413^2 + 0,1587 \times 0,0228 \approx 0,7114$, d'où $p_1^4 p_0^3 \approx 0,304$.

Conclusion

la probabilité que le message soit le même en A et en C est

$$(\Phi(2)^2 + (1 - \Phi(1))(1 - \Phi(2)))^4 (\Phi(1)^2 + (1 - \Phi(1))(1 - \Phi(2)))^3 \approx 0,304.$$

PROBLÈME

Première partie - A

1. (a)

On exprime la position à l'instant $n + 1$ en conditionnant par la position à l'instant n (formule des probabilités totales).

Notons X_n la position du point à l'instant n . Les points M_1, M_2, M_3, M_4 sont deux à deux distincts ; pour chaque M_i , les deux points les plus proches sont ses voisins sur le cercle (à distance $\sqrt{2}$), le point diamétralement opposé étant à distance 2 :

- les plus proches de M_1 sont M_2 et M_4 ; de M_2 : M_1 et M_3 ; de M_3 : M_2 et M_4 ; de M_4 : M_3 et M_1 .

La famille $([X_n = M_1], [X_n = M_2], [X_n = M_3], [X_n = M_4])$ est un système complet d'événements. Pour tout événement F :

$$P(F) = \sum_{i=1}^4 P([X_n = M_i] \cap F)$$

et, si $P(X_n = M_i) > 0$, $P([X_n = M_i] \cap F) = P(X_n = M_i) P_{[X_n = M_i]}(F)$; si $P(X_n = M_i) = 0$, le terme est nul et l'égalité $P([X_n = M_i] \cap F) = P(X_n = M_i) \times c$ reste vraie pour toute constante c . Avec $F = [X_{n+1} = M_1]$, seuls M_2 et M_4 mènent à M_1 , chacun avec la probabilité $\frac{1}{2}$:

$$\alpha_{n+1} = \frac{1}{2}\beta_n + \frac{1}{2}\delta_n$$

De même :

$$\beta_{n+1} = \frac{1}{2}\alpha_n + \frac{1}{2}\gamma_n \quad \gamma_{n+1} = \frac{1}{2}\beta_n + \frac{1}{2}\delta_n \quad \delta_{n+1} = \frac{1}{2}\alpha_n + \frac{1}{2}\gamma_n$$

Conclusion

$V_{n+1} = AV_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

(b)

On itère la relation $V_{n+1} = AV_n$ par récurrence.

À l'instant 0, le point est en $M_1 : V_0 = {}^t(1 \ 0 \ 0 \ 0)$. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = A^n V_0$. C'est vrai pour $n = 0$ car $A^0 = I_4$. Si $V_n = A^n V_0$, alors $V_{n+1} = AV_n = A A^n V_0 = A^{n+1} V_0$.

Conclusion

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = A^n V_0 = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire que V_n est la première colonne de A^n .

2. (a)

On calcule A^2 puis $A^3 = A^2 A$ par produit matriciel.

Le coefficient (i, j) de A^2 est

$$\sum_{k=1}^4 a_{ik} a_{kj}.$$

Par exemple, $(A^2)_{11} = a_{12}a_{21} + a_{14}a_{41} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ et $(A^2)_{12} = a_{12}a_{22} + a_{14}a_{42} = 0$. On obtient :

$$A^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Puis $A^3 = A^2 A$: la première ligne de A^2 , $\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0\right)$, multipliée par les colonnes de A donne $\left(0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$; la deuxième ligne $\left(0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$ donne $\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0\right)$; les lignes 3 et 4 de A^2 étant égales aux lignes 1 et 2, il en est de même pour A^3 .

Conclusion

$$A^3 = A.$$

(b)

On exploite la relation $A^3 = A$ pour obtenir A^n , puis on lit V_n dans la première colonne.

Puissances de A . Pour tout $n \geq 1$: $A^{n+2} = A^{n-1} A^3 = A^{n-1} A = A^n$. Par récurrence (sur k), on en déduit $A^{2k+1} = A$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $A^{2k} = A^2$ pour tout $k \geq 1$. Ainsi :

$A^0 = I_4$; pour n impair, $A^n = A$; pour n pair, $n \geq 2$, $A^n = A^2$ (matrice calculée en (a)).

Probabilités.

Méthode 1 — Lecture de la première colonne de A^n . D'après 1.(b), V_n est la première colonne de A^n :

- $n = 0$: $\alpha_0 = 1, \beta_0 = \gamma_0 = \delta_0 = 0$;
- n impair : $\alpha_n = \gamma_n = 0$ et $\beta_n = \delta_n = \frac{1}{2}$;
- n pair, $n \geq 2$: $\alpha_n = \gamma_n = \frac{1}{2}$ et $\beta_n = \delta_n = 0$.

Méthode 2 — Étude directe des suites. Les relations de 1.(a) donnent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_{n+1} = \gamma_{n+1}$ et $\beta_{n+1} = \delta_{n+1}$. Donc pour $n \geq 1$:

$\alpha_{n+1} = \frac{1}{2}(\beta_n + \delta_n) = \beta_n$ et $\beta_{n+1} = \frac{1}{2}(\alpha_n + \gamma_n) = \alpha_n$. Comme $\alpha_1 = 0$ et $\beta_1 = \frac{1}{2}$, une récurrence immédiate montre que (α_n, β_n) vaut $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ pour n impair et

$\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ pour $n \geq 2$ pair ; on retrouve les mêmes valeurs. Cette approche met en évidence le phénomène de parité : à chaque pas, le point passe de $\{M_1, M_3\}$ à $\{M_2, M_4\}$ et inversement.

Conclusion

$A^n = I_4$ si $n = 0$, $A^n = A$ si n est impair, $A^n = A^2$ si $n \geq 2$ est pair ; le point est, aux instants impairs, en M_2 ou M_4 avec probabilité $\frac{1}{2}$ chacun, et aux instants pairs non nuls, en M_1 ou M_3 avec probabilité $\frac{1}{2}$ chacun.

3. (a)

On résout le système $AX = 0$ pour le noyau, et on utilise l'image des vecteurs de base pour l'image.

Noyau. Soit $u = xe_1 + ye_2 + ze_3 + te_4$, de colonne de coordonnées $X = {}^t(x \ y \ z \ t)$. Alors $f(u) = 0 \iff AX = 0 \iff \frac{1}{2}(y + t) = 0$ et $\frac{1}{2}(x + z) = 0$ (les lignes 3 et 4 répètent les lignes 1 et 2). Donc $u \in \text{Ker } f \iff u = x(e_1 - e_3) + y(e_2 - e_4)$, et

$$\text{Ker } f = \text{Vect}(e_1 - e_3, e_2 - e_4)$$

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc forment une base de $\text{Ker } f$: $\dim \text{Ker } f = 2$.

Image. $\text{Im } f = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4))$. D'après les colonnes de A : $f(e_1) = f(e_3) = \frac{1}{2}(e_2 + e_4)$ et $f(e_2) = f(e_4) = \frac{1}{2}(e_1 + e_3)$. Donc

$$\text{Im } f = \text{Vect}(e_1 + e_3, e_2 + e_4)$$

ces deux vecteurs non colinéaires formant une base : $\dim \text{Im } f = 2$, conformément au théorème du rang ($2 + 2 = 4$).

(b)

Il faut montrer que la somme $\text{Ker } f + \text{Im } f$ est directe et égale à E .

Méthode 1 — Concaténation de bases. Montrons que

$(e_1 - e_3, e_2 - e_4, e_1 + e_3, e_2 + e_4)$ est une base de E . Si

$a(e_1 - e_3) + b(e_2 - e_4) + c(e_1 + e_3) + d(e_2 + e_4) = 0$, alors

$(a + c)e_1 + (b + d)e_2 + (c - a)e_3 + (d - b)e_4 = 0$, d'où $a + c = c - a = 0$ et

$b + d = d - b = 0$, donc $a = b = c = d = 0$. La famille est libre, de cardinal

$4 = \dim E$: c'est une base. La concaténation d'une base de $\text{Ker } f$ et d'une base de $\text{Im } f$ étant une base de E , on a $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$.

Méthode 2 — Intersection et dimensions. Soit $u \in \text{Ker } f \cap \text{Im } f$. Comme $u \in \text{Im } f$, $u = c(e_1 + e_3) + d(e_2 + e_4)$, de coordonnées (c, d, c, d) . Comme $u \in \text{Ker } f$, la condition de (a) donne $d + d = 0$ et $c + c = 0$, donc $u = 0$. La somme est directe, et $\dim(\text{Ker } f \oplus \text{Im } f) = 2 + 2 = 4 = \dim E$, donc $\text{Ker } f \oplus \text{Im } f = E$.

La première méthode est un calcul de famille libre ; la seconde, plus conceptuelle, n'utilise que l'intersection et le théorème du rang, et s'adapte à tout endomorphisme dès que $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0\}$.

Conclusion

$$E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f.$$

(c)

La matrice demandée signifie : $f(e'_1) = e'_2$, $f(e'_2) = e'_1$, $f(e'_3) = 0$, $f(e'_4) = 0$. On cherche e'_1, e'_2 dans $\text{Im } f$ et e'_3, e'_4 dans $\text{Ker } f$.

Posons $e'_1 = e_1 + e_3$, $e'_2 = e_2 + e_4$, $e'_3 = e_1 - e_3$, $e'_4 = e_2 - e_4$. D'après (b), $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4)$ est une base de E . Avec les images calculées en (a) :

$$f(e'_1) = f(e_1) + f(e_3) = e_2 + e_4 = e'_2 \quad f(e'_2) = f(e_2) + f(e_4) = e_1 + e_3 = e'_1$$

et $f(e'_3) = f(e'_4) = 0$ puisque $e'_3, e'_4 \in \text{Ker } f$.

Conclusion

dans la base $\mathcal{B}'$, la matrice de f est

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(d)

On cherche les réels λ pour lesquels il existe $u \neq 0$ tel que $f(u) = \lambda u$.

Méthode 1 — Dans la base $\mathcal{B}'$. Soit $u = ae'_1 + be'_2 + ce'_3 + de'_4$. D'après (c), $f(u) = be'_1 + ae'_2$. Donc $f(u) = \lambda u$ équivaut à :

$$b = \lambda a, \quad a = \lambda b, \quad \lambda c = 0, \quad \lambda d = 0$$

Si $\lambda = 0$: $a = b = 0$ et $u \in \text{Vect}(e'_3, e'_4) = \text{Ker } f$, qui n'est pas réduit à $\{0\}$; 0 est valeur propre et $E_0 = \text{Ker } f$.

Si $\lambda \neq 0$: $c = d = 0$ et $a = \lambda b = \lambda^2 a$. Si $a = 0$, alors $b = \lambda a = 0$ et $u = 0$. Pour $u \neq 0$, il faut donc $a \neq 0$ et $\lambda^2 = 1$, soit $\lambda \in \{-1, 1\}$. Pour $\lambda = 1$: $b = a$, $u = a(e'_1 + e'_2)$. Pour $\lambda = -1$: $b = -a$, $u = a(e'_1 - e'_2)$.

Méthode 2 — Résolution directe dans la base $\mathcal{B}$. Le système $AX = \lambda X$ s'écrit $\frac{1}{2}(y+t) = \lambda x$, $\frac{1}{2}(x+z) = \lambda y$, $\frac{1}{2}(y+t) = \lambda z$, $\frac{1}{2}(x+z) = \lambda t$. Il entraîne $\lambda x = \lambda z$ et $\lambda y = \lambda t$. Pour $\lambda \neq 0$: $z = x$, $t = y$, puis $y = \lambda x$ et $x = \lambda y$, d'où $x = \lambda^2 x$; une solution non nulle impose $x \neq 0$ (sinon $y = 0$, puis $z = t = 0$), donc $\lambda = \pm 1$ et $X = x^t(1 \ \lambda \ 1 \ \lambda)$. Pour $\lambda = 0$, on retrouve le noyau.

La première méthode exploite la réduction préparée en (c) ; la seconde est autonome et ne nécessite que la résolution d'un système.

Conclusion

les valeurs propres de f sont $-1, 0$ et 1 , avec

$$\begin{aligned} E_1 &= \text{Vect}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) & E_{-1} &= \text{Vect}(e_1 - e_2 + e_3 - e_4) & E_0 &= \text{Ker } f \\ &= \text{Vect}(e_1 - e_3, e_2 - e_4) \end{aligned}$$

(e)

On rassemble des bases des sous-espaces propres et on vérifie qu'on obtient une base de E .

Posons $v_1 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$, $v_2 = e_1 - e_2 + e_3 - e_4$, $v_3 = e_1 - e_3$, $v_4 = e_2 - e_4$. Les sous-espaces propres associés aux valeurs propres distinctes $1, -1, 0$ sont en somme directe ; la concaténation de leurs bases (v_1) , (v_2) , (v_3, v_4) est donc libre, et elle comporte $1 + 1 + 2 = 4 = \dim E$ vecteurs : $\mathcal{B}'' = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est une base de E formée de vecteurs propres.

La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}''$ a pour colonnes les coordonnées de $v_1, \dots, v_4$ dans $\mathcal{B}$:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Conclusion

avec cette matrice P , inversible, la formule de changement de base donne

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

matrice de f dans $\mathcal{B}''$.

(f)

On utilise $A = PDP^{-1}$, d'où $A^n = PD^nP^{-1}$, et on calcule explicitement P^{-1} .

Puissances. Par récurrence, $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: c'est vrai pour $n = 0$, et $A^{n+1} = PDP^{-1}PD^nP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$. La matrice D est diagonale, donc $D^n = \text{diag}(1, (-1)^n, 0^n, 0^n)$; pour $n \geq 1$, $D^n = \text{diag}(1, (-1)^n, 0, 0)$, et $A^0 = I_4$.

Inverse de P . Les colonnes $C'_1, \dots, C'_4$ de P vérifient ${}^tC'_iC'_j = 0$ pour $i \neq j$ (par exemple ${}^tC'_2C'_4 = 0 - 1 + 0 + 1 = 0$), et ${}^tC'_1C'_1 = {}^tC'_2C'_2 = 4$, ${}^tC'_3C'_3 = {}^tC'_4C'_4 = 2$. Donc ${}^tPP = \text{diag}(4, 4, 2, 2)$, et en posant $\Delta = \text{diag}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ on obtient $(\Delta {}^tP)P = I_4$. La matrice carrée P admettant un inverse à gauche est inversible, d'inverse

$$P^{-1} = \Delta^t P = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Calcul. Pour $n \geq 1$, $D^n P^{-1}$ a pour lignes $\frac{1}{4}(1, 1, 1, 1)$, $\frac{(-1)^n}{4}(1, -1, 1, -1)$, puis deux lignes nulles. En multipliant à gauche par P , seules les deux premières colonnes de P interviennent :

$$A^n = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \ 1 \ 1 \ 1) + \frac{(-1)^n}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} (1 \ -1 \ 1 \ -1)$$

soit, en numérotant lignes et colonnes de 1 à 4 : $(A^n)_{ij} = \frac{1 + (-1)^{n+i+j}}{4}$ pour $n \geq 1$.

Pour n impair, ce coefficient vaut $\frac{1}{2}$ si $i + j$ est impair et 0 sinon : on retrouve $A^n = A$.

Pour $n \geq 2$ pair, il vaut $\frac{1}{2}$ si $i + j$ est pair et 0 sinon : on retrouve $A^n = A^2$.

Conclusion

$A^0 = I_4$ et, pour tout $n \geq 1$, $A^n = \left(\frac{1 + (-1)^{n+i+j}}{4} \right)_{1 \leq i, j \leq 4}$, ce qui redonne le résultat de 2.(b).

Deuxième partie - B

Question adaptée au programme actuel (préambule de la partie B) : les points du cercle

sont repérés par $P(\varphi) = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ et l'on utilise $\theta = \frac{2\pi}{n}$; tous les calculs de cette partie sont menés dans $\mathbb{R}$.

Rappels utilisés. Formules d'addition : $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ et $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$. En particulier $\cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin a$ et $\sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = \cos a$. Les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont 2π -périodiques.

1. (a)

Question adaptée au programme actuel (règle de déplacement exprimée avec $P(\varphi)$).

On détermine les transitions possibles entre les quatre points, puis on applique la formule des probabilités totales comme en A-1.(a).

On a $M_1 = P(0)$, $M_2 = P\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $M_3 = P(\pi)$, $M_4 = P\left(\frac{3\pi}{2}\right) = P\left(-\frac{\pi}{2}\right)$. Depuis $M_1 = P(0)$, le point va en $P\left(\frac{\pi}{2}\right) = M_2$ avec la probabilité p , en $P\left(-\frac{\pi}{2}\right) = M_4$ avec la probabilité q . De même : de M_2 vers M_3 (p) ou M_1 (q); de M_3 vers M_4 (p) ou M_2 (q); de M_4 vers $P(2\pi) = M_1$ (p) ou M_3 (q).

Avec le système complet $([X_n = M_i])_{1 \leq i \leq 4}$ et la même justification qu'en A-1.(a) :

$$\alpha_{n+1} = q\beta_n + p\delta_n \quad \beta_{n+1} = p\alpha_n + q\gamma_n \quad \gamma_{n+1} = p\beta_n + q\delta_n \quad \delta_{n+1} = q\alpha_n + p\gamma_n$$

Conclusion

$$V_{n+1} = AV_n \text{ avec}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & q & 0 & p \\ p & 0 & q & 0 \\ 0 & p & 0 & q \\ q & 0 & p & 0 \end{pmatrix}.$$

(b)

Question adaptée au programme actuel : les vecteurs C_2 et C_4 sont remplacés par des vecteurs réels, dont on calcule les images.

On calcule les produits AC_k ligne par ligne, en utilisant $p + q = 1$. On pose $r = p - q$.

$AC_1 = {}^t(q + p, p + q, p + q, q + p) = C_1$: comme $C_1 \neq 0$, C_1 est vecteur propre de A pour la valeur propre 1.

$$AC_3 = {}^t(-q - p, p + q, -p - q, q + p) = {}^t(-1, 1, -1, 1) = -C_3 :$$

$C_3 \neq 0$ est vecteur propre de A pour la valeur propre -1 .

$$AC_2 = {}^t(0, p - q, 0, q - p) = rC_4 \text{ et } AC_4 = {}^t(q - p, 0, p - q, 0) = -rC_2.$$

Remarque : si $r \neq 0$, AC_2 n'est pas colinéaire à C_2 ; C_2 et C_4 ne sont vecteurs propres (pour la valeur propre 0) que dans le cas $p = q = \frac{1}{2}$, qui est celui de la partie A.

Conclusion

$$AC_1 = C_1, AC_3 = -C_3, AC_2 = (p - q)C_4 \text{ et } AC_4 = -(p - q)C_2.$$

(c)

Question adaptée au programme actuel (indépendance dans $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$).

Méthode 1 — Résolution d'un système. Soit a, b, c, d réels tels que $aC_1 + bC_2 + cC_3 + dC_4 = 0$. Coordonnée par coordonnée :

$$a + b + c = 0, \quad a - c + d = 0, \quad a - b + c = 0, \quad a - c - d = 0$$

Les équations 1 et 3 donnent $b = 0$ et $a + c = 0$; les équations 2 et 4 donnent $d = 0$ et $a - c = 0$. Donc $a = b = c = d = 0$.

Méthode 2 — Orthogonalité. Pour le produit scalaire canonique $\langle X, Y \rangle = {}^tXY$ de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \langle C_1, C_2 \rangle &= 1 - 1 = 0, \quad \langle C_1, C_3 \rangle = 0, \quad \langle C_1, C_4 \rangle = 1 - 1 = 0, \quad \langle C_2, C_3 \rangle = 1 - 1 = 0 \\ , \quad \langle C_2, C_4 \rangle &= 0, \quad \langle C_3, C_4 \rangle = -1 + 1 = 0 \end{aligned}$$

Les quatre vecteurs sont non nuls et deux à deux orthogonaux, donc libres : si

$$\sum_k a_k C_k = 0,$$

le produit scalaire avec C_j donne $a_j \|C_j\|^2 = 0$, donc $a_j = 0$.

La seconde méthode est plus rapide et donne en plus les coordonnées d'un vecteur quelconque dans cette famille ($a_j = \frac{\langle V, C_j \rangle}{\|C_j\|^2}$), ce qui servira en (e).

Conclusion

(C_1, C_2, C_3, C_4) est libre, et, ayant $4 = \dim \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ éléments, c'est une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

(d)

Question adaptée au programme actuel (coefficients μ_k réels).

On utilise la linéarité de A et de A^n , et l'on calcule $A^n C_k$ pour chaque k .

Calcul de AV . Par (b) :

$$AV = \mu_1 C_1 + \mu_2 r C_4 - \mu_3 C_3 - \mu_4 r C_2 = \mu_1 C_1 - r \mu_4 C_2 - \mu_3 C_3 + r \mu_2 C_4$$

Puissances sur C_1 et C_3 . Par récurrence immédiate, $A^n C_1 = C_1$ et $A^n C_3 = (-1)^n C_3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Puissances sur C_2 et C_4 (avec la convention $r^0 = 1$).

Méthode 1 — Récurrence avec les fonctions trigonométriques. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n C_2 = r^n \left(\cos \frac{n\pi}{2} C_2 + \sin \frac{n\pi}{2} C_4 \right) \quad A^n C_4 = r^n \left(-\sin \frac{n\pi}{2} C_2 + \cos \frac{n\pi}{2} C_4 \right)$$

Pour $n = 0$, ce sont les égalités $C_2 = C_2$ et $C_4 = C_4$. Si elles sont vraies au rang n , alors par (b) :

$$A^{n+1} C_2 = r^n \left(\cos \frac{n\pi}{2} r C_4 - \sin \frac{n\pi}{2} r C_2 \right) = r^{n+1} \left(\cos \frac{(n+1)\pi}{2} C_2 + \sin \frac{(n+1)\pi}{2} C_4 \right)$$

car $\cos \frac{(n+1)\pi}{2} = -\sin \frac{n\pi}{2}$ et $\sin \frac{(n+1)\pi}{2} = \cos \frac{n\pi}{2}$. De même :

$$A^{n+1} C_4 = r^n \left(-\sin \frac{n\pi}{2} r C_4 - \cos \frac{n\pi}{2} r C_2 \right) = r^{n+1} \left(-\sin \frac{(n+1)\pi}{2} C_2 + \cos \frac{(n+1)\pi}{2} C_4 \right)$$

Méthode 2 — Séparation des indices pairs et impairs. Par (b),

$A^2 C_2 = r A C_4 = -r^2 C_2$ et $A^2 C_4 = -r A C_2 = -r^2 C_4$. Par récurrence sur k :

$A^{2k} C_2 = (-1)^k r^{2k} C_2$ et $A^{2k} C_4 = (-1)^k r^{2k} C_4$, puis $A^{2k+1} C_2 = (-1)^k r^{2k+1} C_4$ et

$A^{2k+1} C_4 = (-1)^{k+1} r^{2k+1} C_2$. Comme $\cos(k\pi) = (-1)^k$, $\sin(k\pi) = 0$, $\cos \frac{(2k+1)\pi}{2} = 0$

et $\sin \frac{(2k+1)\pi}{2} = (-1)^k$, ces formules coïncident avec celles de la méthode 1.

La méthode 2 est la plus élémentaire (il suffit de remarquer que A^2 agit comme $-r^2$ sur $\text{Vect}(C_2, C_4)$); la méthode 1 donne directement une formule unique valable pour tout n , que l'on réutilisera en B-4.

Conclusion

par linéarité, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n V = \mu_1 C_1 + (-1)^n \mu_3 C_3 + r^n \left[\left(\mu_2 \cos \frac{n\pi}{2} - \mu_4 \sin \frac{n\pi}{2} \right) C_2 + \left(\mu_2 \sin \frac{n\pi}{2} + \mu_4 \cos \frac{n\pi}{2} \right) C_4 \right]$$

avec $r = p - q = 2p - 1$.

(e)

On décompose V_0 sur la base (C_1, C_2, C_3, C_4) , puis on applique (d) avec $V_n = A^n V_0$ (même démonstration qu'en A-1.(b)).

Avec les produits scalaires de (c) : $\langle V_0, C_1 \rangle = 1$, $\|C_1\|^2 = 4$; $\langle V_0, C_2 \rangle = 1$, $\|C_2\|^2 = 2$; $\langle V_0, C_3 \rangle = 1$, $\|C_3\|^2 = 4$; $\langle V_0, C_4 \rangle = 0$. Donc

$$V_0 = \frac{1}{4}C_1 + \frac{1}{2}C_2 + \frac{1}{4}C_3$$

ce que l'on vérifie directement :

$$\frac{1}{4}(1, 1, 1, 1) + \frac{1}{2}(1, 0, -1, 0) + \frac{1}{4}(1, -1, 1, -1) = (1, 0, 0, 0).$$

Par (d) avec $\mu_1 = \frac{1}{4}$, $\mu_2 = \frac{1}{2}$, $\mu_3 = \frac{1}{4}$, $\mu_4 = 0$:

$$V_n = \frac{1}{4}C_1 + \frac{(-1)^n}{4}C_3 + \frac{r^n}{2} \left(\cos \frac{n\pi}{2} C_2 + \sin \frac{n\pi}{2} C_4 \right)$$

Conclusion

pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec $r = 2p - 1$ (et $r^0 = 1$) :

$$\alpha_n = \frac{1 + (-1)^n}{4} + \frac{(2p-1)^n}{2} \cos \frac{n\pi}{2} \quad \beta_n = \frac{1 - (-1)^n}{4} + \frac{(2p-1)^n}{2} \sin \frac{n\pi}{2}$$

$$\gamma_n = \frac{1 + (-1)^n}{4} - \frac{(2p-1)^n}{2} \cos \frac{n\pi}{2} \quad \delta_n = \frac{1 - (-1)^n}{4} - \frac{(2p-1)^n}{2} \sin \frac{n\pi}{2}$$

Contrôles : la somme vaut 1 ; pour $p = \frac{1}{2}$ et $n \geq 1$, on retrouve les valeurs de A-2.(b) ; pour $p = 1$, le point tourne de façon certaine et l'on trouve par exemple $\beta_1 = 1$, $\gamma_2 = 1$.

2. (a)

Question adaptée au programme actuel ($z_1, \dots, z_n$ réels distincts).

On transforme M et la matrice proposée, notée Q , par des opérations élémentaires (qui conservent le rang) en une même matrice. On suppose $n \geq 2$ (pour $n = 1$, les deux matrices valent (1)). On note N la matrice carrée d'ordre $n - 1$ de lignes

$$(1, z_k, z_k^2, \dots, z_k^{n-2}) \text{ pour } k = 2, \dots, n, \text{ et } T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} \text{ (écriture par blocs).}$$

Rang de T . Les colonnes de T sont $\varepsilon_1 = {}^t(1, 0, \dots, 0)$ et les vecteurs $\begin{pmatrix} 0 \\ N_l \end{pmatrix}$, où N_l parcourt

les colonnes de N . L'application $Y \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ Y \end{pmatrix}$ est linéaire injective, donc la famille des

$\begin{pmatrix} 0 \\ N_l \end{pmatrix}$ a pour rang $\text{rg } N$; elle engendre un sous-espace de l'hyperplan des vecteurs de

première coordonnée nulle, qui ne contient pas ε_1 . La somme

$$\text{Vect}(\varepsilon_1) + \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ N_l \end{pmatrix} \right)$$

est donc directe et $\text{rg } T = 1 + \text{rg } N$.

Passage de Q à T . La première colonne de Q est ε_1 . Les opérations $C_l \leftarrow C_l - z_1^l C_0$ (colonnes numérotées de 0 à $n-1$, pour $l = 1, \dots, n-1$) annulent la première ligne sauf son premier coefficient et ne modifient pas les autres lignes (dont le premier coefficient est nul) : on obtient T . Donc $\text{rg } Q = \text{rg } T$.

Passage de M à T . Effectuons successivement, pour $l = n-1, n-2, \dots, 1$ (dans cet ordre, afin que la colonne C_{l-1} utilisée soit encore la colonne initiale), $C_l \leftarrow C_l - z_1 C_{l-1}$. Le coefficient de la ligne k et de la colonne $l \geq 1$ devient $z_k^l - z_1 z_k^{l-1} = (z_k - z_1) z_k^{l-1}$; il est nul pour $k = 1$. La matrice obtenue a pour première ligne $(1, 0, \dots, 0)$ et pour ligne $k \geq 2$: $(1, (z_k - z_1), (z_k - z_1)z_k, \dots, (z_k - z_1)z_k^{n-2})$. Les opérations $L_k \leftarrow L_k - L_1$ ($k \geq 2$) annulent la première colonne sous le coefficient 1, puis les opérations $L_k \leftarrow \frac{1}{z_k - z_1} L_k$, licites car $z_k \neq z_1$, donnent exactement T . Donc $\text{rg } M = \text{rg } T$.

Conclusion

$\text{rg } M = \text{rg } T = \text{rg } Q$, et plus précisément $\text{rg } M = 1 + \text{rg } N$.

(b)

Il s'agit de montrer que M est de rang n .

Méthode 1 — Récurrence à l'aide de (a). Montrons par récurrence sur $m \geq 1$ que pour tous réels $z_1, \dots, z_m$ deux à deux distincts, la matrice M associée (d'ordre m) est de rang m . Pour $m = 1$, $M = (1)$ est de rang 1. Si la propriété est vraie au rang $m-1$ (avec $m \geq 2$), la matrice N de (a) est la matrice associée aux $m-1$ réels distincts $z_2, \dots, z_m$, donc de rang $m-1$, et (a) donne $\text{rg } M = 1 + (m-1) = m$.

Méthode 2 — Argument polynomial. Soit $X = {}^t(x_0, \dots, x_{n-1}) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $MX = 0$. Le polynôme

$$R(t) = \sum_{l=0}^{n-1} x_l t^l,$$

de degré au plus $n-1$, vérifie $R(z_k) = 0$ pour $k = 1, \dots, n$: il a au moins n racines distinctes, donc c'est le polynôme nul, et $X = 0$. L'application $X \mapsto MX$ est injective ; par le théorème du rang, $\text{rg } M = n$.

La première méthode suit la démarche suggérée par l'énoncé ; la seconde, plus directe, repose sur le nombre de racines d'un polynôme et se retient pour toute matrice de ce type.

Conclusion

$\text{rg } M = n$; en particulier M est inversible.

3. (a)

Question adaptée au programme actuel : les vecteurs propres complexes de l'énoncé initial sont remplacés par les vecteurs réels U_k et W_k .

On calcule la coordonnée d'indice i de AU_k en réindexant la somme par m , puis on applique les formules d'addition.

Réindexation. Fixons $i \in \{0, \dots, n-1\}$ et notons $m(j)$ le reste de la division de $j - i + n$ par n , de sorte que $A_{ij} = a_{m(j)}$. Pour $j \geq i$, $m(j) = j - i$; pour $j < i$, $m(j) = j - i + n$. L'application $j \mapsto m(j)$ est une bijection de $\{0, \dots, n-1\}$ sur lui-même, de réciproque $m \mapsto j = i + m$ si $i + m \leq n-1$ et $j = i + m - n$ sinon. Dans les deux cas, $jk\theta$ et $(i+m)k\theta$ diffèrent de 0 ou de $kn\theta = 2k\pi$; par 2π -périodicité, $\cos(jk\theta) = \cos((i+m)k\theta)$ et $\sin(jk\theta) = \sin((i+m)k\theta)$.

Calcul. Ainsi :

$$\begin{aligned}(AU_k)_i &= \sum_{j=0}^{n-1} a_{m(j)} \cos(jk\theta) = \sum_{m=0}^{n-1} a_m \cos((i+m)k\theta) \\ &= \sum_{m=0}^{n-1} a_m (\cos(ik\theta) \cos(mk\theta) - \sin(ik\theta) \sin(mk\theta))\end{aligned}$$

donc $(AU_k)_i = c_k \cos(ik\theta) - s_k \sin(ik\theta)$, c'est-à-dire $AU_k = c_k U_k - s_k W_k$. De même :

$$\begin{aligned}(AW_k)_i &= \sum_{m=0}^{n-1} a_m \sin((i+m)k\theta) = \sum_{m=0}^{n-1} a_m (\sin(ik\theta) \cos(mk\theta) + \cos(ik\theta) \sin(mk\theta)) \\ &= c_k \sin(ik\theta) + s_k \cos(ik\theta)\end{aligned}$$

donc $AW_k = s_k U_k + c_k W_k$.

Conséquences.

- $k = 0 : U_0 = {}^t(1, \dots, 1) \neq 0$, $s_0 = 0$ et

$$c_0 = \sum_{m=0}^{n-1} a_m,$$

d'où $AU_0 = c_0 U_0 : U_0$ est vecteur propre pour la valeur propre $a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1}$.

- n pair, $k = \frac{n}{2} : k\theta = \pi$, donc $U_{n/2} = ((-1)^j)_j \neq 0$, $W_{n/2} = 0$,

$$s_{n/2} = \sum a_m \sin(m\pi) = 0$$

et

$$c_{n/2} = \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m a_m.$$

Ainsi $U_{n/2}$ est vecteur propre pour la valeur propre $a_0 - a_1 + a_2 - \dots - a_{n-1}$.

- Si $s_k = 0$: $AU_k = c_k U_k$ avec $U_k \neq 0$ (sa première coordonnée vaut 1), donc U_k est vecteur propre pour c_k ; et $AW_k = c_k W_k$, donc W_k est aussi vecteur propre pour c_k lorsque $W_k \neq 0$.

Conclusion

$AU_k = c_k U_k - s_k W_k$ et $AW_k = s_k U_k + c_k W_k$; U_0 (valeur propre

$$\sum a_m$$

), $U_{n/2}$ si n est pair (valeur propre

$$\sum (-1)^m a_m$$

), et, lorsque $s_k = 0$, U_k et $W_k \neq 0$ (valeur propre c_k) sont vecteurs propres de A .

(b)

Question adaptée au programme actuel : dans $\mathbb{R}$, une telle matrice n'est pas toujours diagonalisable ; on caractérise le cas où elle l'est.

On calcule les vecteurs et les coefficients c_k , s_k pour $n = 4$, puis on traite séparément les cas $a_1 = a_3$ et $a_1 \neq a_3$.

Vecteurs. Pour $n = 4$, $\theta = \frac{\pi}{2}$: $U_0 = {}^t(1, 1, 1, 1) = C_1$,

$$U_1 = {}^t(\cos 0, \cos \frac{\pi}{2}, \cos \pi, \cos \frac{3\pi}{2}) = {}^t(1, 0, -1, 0) = C_2,$$

$U_2 = {}^t(1, -1, 1, -1) = C_3$, $W_1 = {}^t(0, 1, 0, -1) = C_4$. D'après B-1.(c) (dont la démonstration ne fait pas intervenir A), (U_0, U_2, U_1, W_1) est une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

Coefficients. $c_0 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3$, $c_2 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3$,

$$c_1 = a_0 + a_1 \cos \frac{\pi}{2} + a_2 \cos \pi + a_3 \cos \frac{3\pi}{2} = a_0 - a_2 \text{ et}$$

$$s_1 = a_1 \sin \frac{\pi}{2} + a_2 \sin \pi + a_3 \sin \frac{3\pi}{2} = a_1 - a_3.$$

Cas $a_1 = a_3$. Alors $s_1 = 0$ et, par (a), U_0, U_2, U_1, W_1 sont des vecteurs propres associés à c_0, c_2, c_1, c_1 . On dispose d'une base de vecteurs propres : A est diagonalisable. La matrice P ayant pour colonnes ces vecteurs est inversible (ses colonnes forment une base) et vérifie $AP = PD$ colonne par colonne, donc $D = P^{-1}AP$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} a_0 + 2a_1 + a_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 - 2a_1 + a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 - a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 - a_2 \end{pmatrix}$$

Cas $a_1 \neq a_3$. Alors $s_1 \neq 0$. Soit λ une valeur propre et X un vecteur propre associé, que l'on décompose dans la base : $X = xU_0 + yU_2 + uU_1 + vW_1$. Par (a) :

$$AX = c_0xU_0 + c_2yU_2 + (c_1u + s_1v)U_1 + (-s_1u + c_1v)W_1$$

L'égalité $AX = \lambda X$ et l'unicité des coordonnées donnent, en particulier :

$$(c_1 - \lambda)u + s_1v = 0 \quad -s_1u + (c_1 - \lambda)v = 0$$

En multipliant la première équation par $c_1 - \lambda$, la seconde par s_1 , et en soustrayant, on obtient $((c_1 - \lambda)^2 + s_1^2)u = 0$. Comme $s_1 \neq 0$, $(c_1 - \lambda)^2 + s_1^2 > 0$, donc $u = 0$, puis $s_1v = 0$ donne $v = 0$. Ainsi tout vecteur propre de A appartient à $\text{Vect}(U_0, U_2)$, de dimension 2. Une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres serait une famille libre de 4 vecteurs dans un sous-espace de dimension 2 : c'est impossible. A n'est pas diagonalisable.

Conclusion

pour $n = 4$, A est diagonalisable si et seulement si $a_1 = a_3$; dans ce cas $D = P^{-1}AP$ avec P et D ci-dessus. On remarque que P est la matrice obtenue en A-3.(e). Pour la matrice de B-1, $a_1 = q$ et $a_3 = p$: elle est diagonalisable si et seulement si $p = \frac{1}{2}$.

(c) i.

Question adaptée au programme actuel : la question (c) est restreinte au cas $a_m = a_{n-m}$, où la diagonalisation a lieu dans $\mathbb{R}$, et elle est guidée en quatre étapes.

On regroupe les termes d'indices m et $n - m$ dans la somme s_k .

Soit $k \in \{0, \dots, n - 1\}$. Le terme d'indice $m = 0$ de s_k est nul, donc

$$s_k = \sum_{m=1}^{n-1} a_m \sin(mk\theta).$$

Le changement d'indice $m' = n - m$, qui est une bijection de $\{1, \dots, n - 1\}$ sur lui-même, donne :

$$\begin{aligned} s_k &= \sum_{m'=1}^{n-1} a_{n-m'} \sin((n - m')k\theta) = \sum_{m'=1}^{n-1} a_{m'} \sin(2k\pi - m'k\theta) = - \sum_{m'=1}^{n-1} a_{m'} \sin(m'k\theta) \\ &= -s_k \end{aligned}$$

en utilisant $a_{n-m'} = a_{m'}$, la 2π -périodicité et l'imparité de $\sin$.

Conclusion

$s_k = 0$ pour tout $k \in \{0, \dots, n - 1\}$.

ii.

On établit les deux identités par les formules d'addition, puis on calcule les sommes par télescopage.

Identités. Pour tous réels a, b : $\sin(a + b) - \sin(a - b) = 2 \cos a \sin b$ et $\cos(a - b) - \cos(a + b) = 2 \sin a \sin b$ (développer chaque terme par les formules d'addition). Avec $a = jx$ et $b = \frac{x}{2}$:

$$\sin \left(\left(j + \frac{1}{2} \right) x \right) - \sin \left(\left(j - \frac{1}{2} \right) x \right) = 2 \sin \left(\frac{x}{2} \right) \cos(jx)$$

$$\cos \left(\left(j - \frac{1}{2} \right) x \right) - \cos \left(\left(j + \frac{1}{2} \right) x \right) = 2 \sin \left(\frac{x}{2} \right) \sin(jx)$$

Sommes. Soit t un entier relatif et $x = t\theta = \frac{2\pi t}{n}$, de sorte que $nx = 2\pi t$. En sommant les identités pour $j = 0, \dots, n-1$ (sommes télescopiques) :

$$2 \sin \left(\frac{x}{2} \right) \sum_{j=0}^{n-1} \cos(jx) = \sin \left(\left(n - \frac{1}{2} \right) x \right) - \sin \left(-\frac{x}{2} \right) = \sin \left(2\pi t - \frac{x}{2} \right) + \sin \left(\frac{x}{2} \right) = 0$$

$$2 \sin \left(\frac{x}{2} \right) \sum_{j=0}^{n-1} \sin(jx) = \cos \left(-\frac{x}{2} \right) - \cos \left(\left(n - \frac{1}{2} \right) x \right) = \cos \left(\frac{x}{2} \right) - \cos \left(2\pi t - \frac{x}{2} \right) = 0$$

Si t n'est pas un multiple de n , $\frac{x}{2} = \frac{\pi t}{n}$ n'est pas un multiple entier de π , donc $\sin \left(\frac{x}{2} \right) \neq 0$ et l'on peut diviser :

$$\sum_{j=0}^{n-1} \cos(jt\theta) = 0$$

et

$$\sum_{j=0}^{n-1} \sin(jt\theta) = 0.$$

Si $t = \ell n$ avec $\ell \in \mathbb{Z}$, chaque terme $\sin(jt\theta) = \sin(2\pi j\ell)$ est nul, donc

$$\sum_{j=0}^{n-1} \sin(jt\theta) = 0$$

également.

Conclusion

$$\sum_{j=0}^{n-1} \cos(jt\theta) = 0$$

pour tout entier t non multiple de n , et

$$\sum_{j=0}^{n-1} \sin(jt\theta) = 0$$

pour tout entier t .

iii.

On calcule les produits scalaires à l'aide des formules de linéarisation et de ii., puis on compte les vecteurs.

Linéarisation. Par les formules d'addition : $\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))$,
 $\sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$, $\cos a \sin b = \frac{1}{2}(\sin(b+a) + \sin(b-a))$.

Orthogonalité. Soit k, l des entiers.

- Pour $0 \leq k, l \leq \frac{n}{2}$ avec $k \neq l$:

$$\langle U_k, U_l \rangle = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} (\cos(j(k-l)\theta) + \cos(j(k+l)\theta)).$$

On a $0 < |k-l| \leq \frac{n}{2} < n$, et $0 < k+l < n$ (car $k+l \leq n$ avec égalité seulement si

$k = l = \frac{n}{2}$, et $k + l > 0$ puisque k et l ne sont pas tous deux nuls). Ni $k - l$ ni $k + l$ n'est multiple de n : par ii., $\langle U_k, U_l \rangle = 0$.

- Pour $1 \leq k, l < \frac{n}{2}$ avec $k \neq l$:

$$\langle W_k, W_l \rangle = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} (\cos(j(k-l)\theta) - \cos(j(k+l)\theta)) = 0,$$

pour la même raison ($0 < |k-l| < n$ et $2 \leq k+l < n$).

- Pour $0 \leq k \leq \frac{n}{2}$ et $1 \leq l < \frac{n}{2}$:

$$\langle U_k, W_l \rangle = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} (\sin(j(l+k)\theta) + \sin(j(l-k)\theta)) = 0$$

par ii., qui vaut pour tout entier.

Vecteurs non nuls. U_k a pour première coordonnée 1. Pour $1 \leq k < \frac{n}{2}$, la coordonnée d'indice 1 de W_k est $\sin \frac{2k\pi}{n} > 0$ car $0 < \frac{2k\pi}{n} < \pi$.

Liberté et cardinal. Une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre (si

$$\sum \lambda_X X = 0,$$

le produit scalaire avec Y donne $\lambda_Y \|Y\|^2 = 0$). Si $n = 2m + 1$, $\mathcal{F}$ contient $U_0, \dots, U_m$ et $W_1, \dots, W_m$, soit $2m + 1 = n$ vecteurs. Si $n = 2m$, $\mathcal{F}$ contient $U_0, \dots, U_m$ et $W_1, \dots, W_{m-1}$, soit $2m = n$ vecteurs.

Conclusion

$\mathcal{F}$ est une famille orthogonale, libre, de $n = \dim \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vecteurs : c'est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

iv.

Il s'agit de produire une base de vecteurs propres et la matrice de passage correspondante.

Méthode 1 — Base explicite de vecteurs propres. Par i., $s_k = 0$ pour tout k .

Par (a), chaque U_k ($0 \leq k \leq \frac{n}{2}$) est vecteur propre pour c_k , et chaque W_k ($1 \leq k < \frac{n}{2}$), non nul par iii., est vecteur propre pour c_k . Par iii., ces vecteurs

forment une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: A est diagonalisable. Notons $h = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ et

$h' = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1$ (de sorte que les indices des W_k vont de 1 à h'). La matrice P dont les colonnes sont, dans cet ordre,

$$U_0, U_1, \dots, U_h, W_1, \dots, W_{h'}$$

a des colonnes qui forment une base ; elle est donc inversible et vérifie $AP = PD$, donc

$$P^{-1}AP = D = \text{diag}(c_0, c_1, \dots, c_h, c_1, \dots, c_{h'}) \quad \text{avec} \quad c_k = \sum_{m=0}^{n-1} a_m \cos \frac{2\pi mk}{n}$$

Méthode 2 — Théorème spectral. Avec les notations de l'énoncé, $A_{ij} = a_m$ où m est le reste de $j - i + n$ modulo n , et $A_{ji} = a_{m'}$ où m' est le reste de $i - j + n$ modulo n . Si $i = j$, $m = m' = 0$; sinon $m' = n - m$ avec $m \in \{1, \dots, n-1\}$, et $a_{m'} = a_m$ par hypothèse. Donc ${}^tA = A$: A est une matrice symétrique réelle, diagonalisable d'après le théorème spectral, avec une matrice de passage orthogonale.

La méthode 2 établit la diagonalisabilité immédiatement mais sans donner les vecteurs propres ; la méthode 1 fournit P et D explicitement. Les deux se rejoignent : en divisant chaque colonne de P par sa norme, on obtient une matrice de passage orthogonale, conformément au théorème spectral.

Conclusion

sous l'hypothèse $a_m = a_{n-m}$, A est diagonalisable, avec P et D ci-dessus.

4. (a)

Question adaptée au programme actuel (points $M_k = P\left(\frac{2k\pi}{N}\right)$, pas angulaire $\frac{2\pi}{N}$, $N \geq 3$).

On procède comme en B-1.(a), les indices étant lus modulo N ($M_N = M_0$, $M_{-1} = M_{N-1}$).

Depuis $M_k = P\left(\frac{2k\pi}{N}\right)$, le point va en $P\left(\frac{2(k+1)\pi}{N}\right) = M_{k+1}$ avec la probabilité p et en $P\left(\frac{2(k-1)\pi}{N}\right) = M_{k-1}$ avec la probabilité q . Comme $N \geq 3$, $M_{k-1} \neq M_{k+1}$. On atteint M_j depuis M_{j-1} (probabilité p) ou depuis M_{j+1} (probabilité q) ; la formule des probabilités totales donne :

$$p_j(n+1) = p p_{j-1}(n) + q p_{j+1}(n) \quad (0 \leq j \leq N-1, \text{ indices modulo } N)$$

Conclusion

$V_{n+1} = AV_n$, où A a pour coefficient p en position $(j, j-1)$, q en position $(j, j+1)$ (indices modulo N) et 0 ailleurs :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & q & 0 & \cdots & 0 & p \\ p & 0 & q & \ddots & & 0 \\ 0 & p & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & p & 0 & q \\ q & 0 & \cdots & 0 & p & 0 \end{pmatrix}$$

C'est la matrice de B-3 (d'ordre N) avec $a_1 = q$, $a_{N-1} = p$ et $a_m = 0$ pour les autres m .
Pour $N = 4$, on retrouve la matrice de B-1.(a).

(b) i.

Question adaptée au programme actuel : la généralisation de B-1 est guidée en quatre étapes, avec les vecteurs réels U_k et W_k .

On applique B-3.(a) avec $a_1 = q$, $a_{N-1} = p$, les autres a_m nuls.

$$\begin{aligned} c_k &= q \cos(k\theta) + p \cos((N-1)k\theta) = q \cos(k\theta) + p \cos(2k\pi - k\theta) = (p+q) \cos(k\theta) \\ &= \cos(k\theta) \end{aligned}$$

$$s_k = q \sin(k\theta) + p \sin(2k\pi - k\theta) = (q-p) \sin(k\theta) = -r \sin(k\theta)$$

Donc, par B-3.(a) :

$$AU_k = \cos(k\theta) U_k + r \sin(k\theta) W_k \quad AW_k = -r \sin(k\theta) U_k + \cos(k\theta) W_k$$

Vecteurs propres. Pour $k = 0$: $AU_0 = U_0$, donc U_0 est vecteur propre pour la valeur propre 1. Si N est pair, pour $k = \frac{N}{2}$: $k\theta = \pi$, $\sin(k\theta) = 0$ et $AU_{N/2} = -U_{N/2}$, donc

$U_{N/2}$ est vecteur propre pour la valeur propre -1 . On retrouve les vecteurs C_1 et C_3 de B-1.(b) ; de même, pour $N = 4$ et $k = 1$, on retrouve $AC_2 = rC_4$ et $AC_4 = -rC_2$. Comme en B-1.(c), la famille $\mathcal{F}$ de B-3.(c) iii. (dont la démonstration n'utilise pas l'hypothèse de symétrie) est une base de $\mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$.

Conclusion

$AU_k = \cos(k\theta)U_k + r \sin(k\theta)W_k$ et $AW_k = -r \sin(k\theta)U_k + \cos(k\theta)W_k$; U_0 est vecteur propre pour 1 et, si N est pair, $U_{N/2}$ est vecteur propre pour -1 .

ii.

On compare coordonnée par coordonnée, à l'aide de B-3.(c) ii. (avec N à la place de n).

La coordonnée d'indice j de

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} U_k$$

est

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \cos(jk\theta) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \cos(kj\theta).$$

Pour $j = 0$, elle vaut $\frac{N}{N} = 1$. Pour $1 \leq j \leq N-1$, l'entier j n'est pas multiple de N , et B-3.(c) ii. (appliqué avec $t = j$, la variable de sommation étant notée k) donne 0.

Conclusion

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} U_k = {}^t(1, 0, \dots, 0) = V_0.$$

iii.

On montre la formule par récurrence sur n , puis on applique la linéarité de A^n à la décomposition de ii.

Réurrence. Fixons k . Pour $n = 0$, $A^0 U_k = U_k = x_{k,0} U_k + y_{k,0} W_k$. Si $A^n U_k = x_{k,n} U_k + y_{k,n} W_k$, alors par i. :

$$\begin{aligned} A^{n+1} U_k &= x_{k,n} (\cos(k\theta) U_k + r \sin(k\theta) W_k) + y_{k,n} (-r \sin(k\theta) U_k + \cos(k\theta) W_k) \\ &= (\cos(k\theta) x_{k,n} - r \sin(k\theta) y_{k,n}) U_k + (r \sin(k\theta) x_{k,n} + \cos(k\theta) y_{k,n}) W_k = x_{k,n+1} U_k \\ &\quad + y_{k,n+1} W_k \end{aligned}$$

Expression de $p_j(n)$. Comme en A-1.(b), $V_n = A^n V_0$. Par ii. et linéarité :

$$V_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} A^n U_k = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (x_{k,n} U_k + y_{k,n} W_k)$$

d'où, en lisant la coordonnée d'indice j :

$$p_j(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(x_{k,n} \cos \frac{2\pi jk}{N} + y_{k,n} \sin \frac{2\pi jk}{N} \right)$$

Cas $p = q = \frac{1}{2}$. Alors $r = 0$: $y_{k,n+1} = \cos(k\theta) y_{k,n}$ avec $y_{k,0} = 0$, donc $y_{k,n} = 0$; et $x_{k,n+1} = \cos(k\theta) x_{k,n}$ avec $x_{k,0} = 1$, donc $x_{k,n} = \cos^n(k\theta)$ (avec la convention $0^0 = 1$). Ainsi :

$$p_j(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \cos^n \left(\frac{2\pi k}{N} \right) \cos \left(\frac{2\pi jk}{N} \right)$$

Conclusion

$$p_j(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(x_{k,n} \cos \frac{2\pi jk}{N} + y_{k,n} \sin \frac{2\pi jk}{N} \right)$$

pour tout $j \in \{0, \dots, N-1\}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, formule qui se réduit à la précédente lorsque $p = \frac{1}{2}$.

iv.

On calcule explicitement les suites $(x_{k,n})$ et $(y_{k,n})$ pour $N = 4$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, puis on évalue $p_j(n)$.

- $k = 0$: $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$, donc $x_{0,n} = 1$, $y_{0,n} = 0$.
- $k = 2$: $\cos \pi = -1$, $\sin \pi = 0$, donc $x_{2,n} = (-1)^n$, $y_{2,n} = 0$.
- $k = 1$: $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, donc $x_{1,n+1} = -ry_{1,n}$, $y_{1,n+1} = rx_{1,n}$. Par récurrence, comme en B-1.(d), $x_{1,n} = r^n \cos \frac{n\pi}{2}$ et $y_{1,n} = r^n \sin \frac{n\pi}{2}$.
- $k = 3$: $\cos \frac{3\pi}{2} = 0$, $\sin \frac{3\pi}{2} = -1$, donc $x_{3,n+1} = ry_{3,n}$, $y_{3,n+1} = -rx_{3,n}$. Par récurrence, $x_{3,n} = r^n \cos \frac{n\pi}{2}$ et $y_{3,n} = -r^n \sin \frac{n\pi}{2}$: en effet $r \left(-r^n \sin \frac{n\pi}{2} \right) = r^{n+1} \cos \frac{(n+1)\pi}{2}$ et $-r \cdot r^n \cos \frac{n\pi}{2} = -r^{n+1} \sin \frac{(n+1)\pi}{2}$.

En reportant dans iii., avec $\cos \frac{3j\pi}{2} = \cos \frac{j\pi}{2}$ et $\sin \frac{3j\pi}{2} = -\sin \frac{j\pi}{2}$ (car $\frac{3j\pi}{2} = 2j\pi - \frac{j\pi}{2}$) :

$$p_j(n) = \frac{1}{4} \left(1 + (-1)^n \cos(j\pi) + 2r^n \left(\cos \frac{n\pi}{2} \cos \frac{j\pi}{2} + \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{j\pi}{2} \right) \right)$$

Pour $j = 0, 1, 2, 3$ (points $M_0 = M_1$, $M_1 = M_2$, $M_2 = M_3$, $M_3 = M_4$ de B-1) :

$$p_0(n) = \frac{1 + (-1)^n}{4} + \frac{r^n}{2} \cos \frac{n\pi}{2} \quad p_1(n) = \frac{1 - (-1)^n}{4} + \frac{r^n}{2} \sin \frac{n\pi}{2}$$

$$p_2(n) = \frac{1 + (-1)^n}{4} - \frac{r^n}{2} \cos \frac{n\pi}{2} \quad p_3(n) = \frac{1 - (-1)^n}{4} - \frac{r^n}{2} \sin \frac{n\pi}{2}$$

Conclusion

pour $N = 4$, on retrouve exactement $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \delta_n$ obtenus en B-1.(e).

Relevé des adaptations

- Exercice de statistiques-probabilités, préambule : « loi centrée réduite » précisé en « loi normale centrée réduite » (la table jointe est celle de la loi normale) ; ajout de l'hypothèse d'indépendance de E et Z , implicite dans l'énoncé et nécessaire au calcul de la loi du coût.
- Exercice de statistiques-probabilités, questions 2 et 3 : ajout de l'hypothèse d'indépendance mutuelle des bruits affectant les différentes transmissions, implicite dans l'énoncé et nécessaire au calcul des probabilités.
- Partie B, préambule : les affixes et le nombre de module 1 d'argument $\frac{2\pi}{n}$ reposaient sur les nombres complexes, hors programme ; les points du cercle sont repérés par $P(\varphi) = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ et l'on introduit $\theta = \frac{2\pi}{n}$.
- B-1, règle de déplacement : reformulée avec $P(\varphi)$, sans changement de sens.
- B-1.(b) : les deux vecteurs propres non réels de l'énoncé initial sont remplacés par les vecteurs réels $C_2 = {}^t(1, 0, -1, 0)$ et $C_4 = {}^t(0, 1, 0, -1)$, et la question demande AC_2, AC_4 en fonction de C_2, C_4 ; C_1, C_3 restent des vecteurs propres.

- B-1.(c) et (d) : liberté étudiée dans $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, coefficients μ_k réels ; indication $r = p - q$ ajoutée.
- B-2 : $z_1, \dots, z_n$ réels distincts au lieu de complexes ; énoncé et conclusions inchangés.
- B-3 : coefficients a_k réels ; les vecteurs propres non réels sont remplacés par les vecteurs réels U_k, W_k et les réels c_k, s_k ; rappel de la description des coefficients de A . En (b), une matrice réelle de cette forme n'étant pas toujours diagonalisable dans $\mathbb{R}$, la question devient « diagonalisable si et seulement si $a_1 = a_3$ ». En (c), restriction au cas $a_m = a_{n-m}$ et découpage en quatre étapes (sommes trigonométriques, orthogonalité, diagonalisation).
- B-4 : points définis par $M_k = P\left(\frac{2k\pi}{N}\right)$; rectification du pas angulaire, noté $\frac{2\pi}{n}$ dans le texte initial alors qu'il s'agit de $\frac{2\pi}{N}$; ajout de $N \geq 3$ pour que les deux voisins soient distincts ; centre « 0 » lu comme O . En (b), la consigne « Généraliser les résultats obtenus en B-1 » est conservée et guidée en quatre étapes réelles.
- Annexe : les tables de la loi binomiale et de la loi de Poisson, qui ne servent à aucune question, ne sont pas reproduites. Dans la table des grandes valeurs de u , la valeur indiquée pour $u = 3,8$ (0.999 892 8, qui correspond en fait à $u \approx 3,7$) est rectifiée en 0.999 928 ; cette valeur n'intervient dans aucune question.
- La figure est retranscrite en SVG dans l'énoncé à partir de l'original, avec les valeurs calculées exactement à partir de la densité de la loi normale centrée réduite et contrôlées sur l'original (axes, graduations et libellés identiques).